

文章编号: 0258-7025(2003)01-0025-04

# 高斯型变反射率圆镜平凹腔本征模场的矩阵分析

凌东雄<sup>1,2</sup>, 伏云昌<sup>1</sup>, 樊则宾<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 昆明理工大学激光应用研究所, 云南 昆明 650093; <sup>2</sup> 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430074)

**摘要** 利用柱坐标下的柯林斯公式, 将圆镜平凹腔的衍射积分方程转化为矩阵方程, 并对平面镜反射率呈高斯分布的圆镜平凹腔的模场分布进行了数值分析, 结果证明平面镜反射率呈高斯分布的圆镜平凹腔具有良好的选模性能。

**关键词** 激光技术; 变反射率圆镜平凹腔; 柯林斯公式; 矩阵光学; 光束质量

**中图分类号** TN 242; TN 248.2-2 **文献标识码** A

## Matrix Analysis of Eigen Mode-fields of the Circular Plano-concave Resonator with a Gaussian-reflectivity Mirror

LING Dong-xiong<sup>1,2</sup>, FU Yun-chang<sup>1</sup>, Fan Ze-bin<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Laser Application Research Institute, Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650093, China)  
(<sup>2</sup> State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract** By means of the Collins Formula in pole coordinates, diffraction integral equation of the circular plano-concave resonator is transformed to matrix equation, and eigen mode-fields of the circular plano-concave resonator with a Gaussian-reflectivity mirror is calculated. It is shown that the circular plano-concave resonator with a Gaussian-reflectivity mirror has a good choosing capability for transverse modes.

**Key words** laser technique; the circular plano-concave with a Gaussian-reflectivity mirror; the Collins formula; matrix optics; quality of light beam

## 1 引言

传统的横向激励大功率 CO<sub>2</sub> 激光器采用平凹腔或者非稳腔, 为了获得高质量的激光光束, 可以采用改良腔镜的方法, 如非均匀反射镜腔<sup>[1]</sup>或梯度相位镜腔<sup>[2]</sup>。本文对高斯型变反射率圆镜平凹腔的腔模结构进行数值模拟, 为圆镜平凹腔的改进提供依据。

柯林斯将经典的标量衍射理论推广到用变换矩阵表示的复杂光学系统, 并且已经应用于 ABCD 光学系统对光束的变换<sup>[3]</sup>; 再者, 由于 Fox-Li 衍射积分迭代法不便计算菲涅耳数较大时的光腔模式, 现通常采用有限和矩阵方程来分析光学谐振腔的本征

模式<sup>[4]</sup>。本文从柱坐标下的柯林斯公式出发, 导出圆镜平凹腔的衍射积分方程, 然后将其转化为有限和矩阵方程, 对普通圆镜平凹腔和高斯型变反射率圆镜平凹腔的模式分布和损耗进行数值计算。

## 2 圆镜平凹腔衍射积分方程

柯林斯将标量衍射理论与矩阵光学理论联系在一起, 已证明, 当衍射面和观察面间为用变换矩阵  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  表征的光学系统时, 惠更斯-菲涅耳衍射积分公式可以表示为<sup>[5]</sup>

收稿日期: 2001-11-13; 收到修改稿日期: 2001-12-24

基金项目: 华中科技大学激光技术国家重点实验室研究基金(批准号: 0109)资助项目。

作者简介: 凌东雄(1964—), 男, 昆明理工大学理学院副教授、硕士生导师, 主要从事激光技术、光电子信息研究。E-mail: lingdongxiong@hotmail.com

$$E_2(r_2, \varphi_2) = -\frac{ik \exp(ikL)}{2\pi B} \iint_{S_1} E_1(r_1, \varphi_1) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[Ar_1^2 + Dr_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\right\} r_1 dr_1 d\varphi_1 \quad (1)$$

其中,  $E_1(r_1, \varphi_1)$  为入射光场,  $E_2(r_2, \varphi_2)$  为衍射光场, 波数  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为光波长。

由于柯林斯公式不考虑光学系统内部的衍射损耗, 如果直接使用光线在谐振腔内的往返传输矩阵, 则忽略了一个腔镜的衍射损耗, 因此, 我们将光线的往返传输分解为两个单程传输, 该方法适用于衍射受限光学系统中衍射光场的计算<sup>[6,7]</sup>。考虑如图 1 所示的圆镜平凹腔, 假定两圆形反射镜  $M_1$  和  $M_2$  的半径为  $a$ , 曲率半径分别为  $\infty$  和  $R$ , 两反射镜的轴向距离为  $L$ , 则从  $M_1$  到  $M_2$  并经  $M_2$  反射的单程传输矩阵为

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ -2/R & 1 - 2L/R \end{bmatrix} \quad (2)$$

而光线从  $M_2$  到  $M_1$  并经  $M_1$  反射的单程传输矩阵为

$$T_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

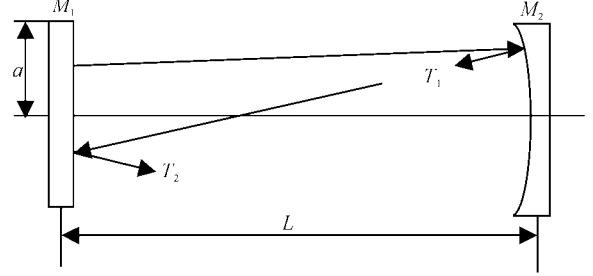


图 1 圆镜平凹腔示意图

Fig. 1 Scheme of a circular plano-concave resonator

对于给定的初始光场  $E_1(r_1, \varphi_1)$ , 由(1), (2) 得到经  $M_2$  后的衍射光场为

$$E_2(r_2, \varphi_2) = -\frac{ik \exp(ikL)}{2\pi B_1} \iint_{S_1} E_1(r_1, \varphi_1) \exp\left\{\frac{ik}{2B_1}[A_1 r_1^2 + D_1 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\right\} dr_1 d\varphi_1 \quad (4)$$

由(1), (3), 可写出经  $M_1$  后的衍射光场

$$E_3(r_1, \varphi_1) = -\frac{ik \exp(ikL)}{2\pi B_2} \iint_{S_2} E_2(r_2, \varphi_2) \exp\left\{\frac{ik}{2B_2}[A_2 r_1^2 + D_2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]\right\} dr_2 d\varphi_2 \quad (5)$$

将光场沿  $r$  和  $\varphi$  方向分离, 令

$$E_1(r_1, \varphi_1) = E_1(r_1) \exp(in\varphi_1), \quad E_2(r_2, \varphi_2) = E_2(r_2) \exp(in\varphi_2), \quad E_3(r_1, \varphi_1) = E_3(r_1) \exp(in\varphi_1) \quad (6)$$

其中  $n$  为整数。将(6) 式代入(4), (5), 可以写出沿  $r$  方向的积分方程

$$E_2(r_2) = -\frac{i^{n-1} k \exp(ikL)}{B_1} \int_0^a E_1(r_1) J_n\left(\frac{kr_1 r_2}{B_1}\right) \exp\left[\frac{ik}{B_1}(A_1 r_1^2 + D_1 r_2^2)\right] r_1 dr_1 \quad (7)$$

$$E_3(r_1) = -\frac{i^{n-1} k \exp(ikL)}{B_2} \int_0^a E_2(r_2) J_n\left(\frac{kr_1 r_2}{B_2}\right) \exp\left[\frac{ik}{B_2}(A_2 r_1^2 + D_2 r_2^2)\right] r_2 dr_2 \quad (8)$$

其中,  $J_n$  为  $n$  阶贝塞尔函数。

以上利用柯林斯公式和光线传输矩阵得到了圆镜平凹腔的衍射积分方程(7), (8), 该形式将衍射积分方程与光线传输矩阵(2), (3)联系到了一起。通常情况下, 不能利用方程(7), (8)来获得自再现的本征模式。

### 3 圆镜平凹腔及高斯型反射率圆镜平凹腔的本征模矩阵方程

由于圆镜腔的本征模式完全由  $r$  方向的衍射积分方程确定, 只要将方程(7), (8) 转化为有限和方程, 即可利用自再现条件写出圆镜平凹腔本征模的矩阵方程。

将圆形反射镜  $M_1, M_2$  分割为  $r$  方向长度相等的  $M$  个微元, 由方程(7), (8) 得到  $r$  方向的光场分布

$$E_2(r_2)_m = \sum_{n=1}^M E_1(r_1) P_{1mn} \quad (9)$$

$$E_3(r_1)_m = \sum_{n=1}^M E_2(r_2) P_{2mn} \quad (10)$$

其中, 单程变换矩阵  $\vec{P}_1$  和  $\vec{P}_2$  的元素表示为

$$P_{1mn} = -\frac{i^{n+1} k m a^2 \exp(ikL)}{B_1 M^2} J_n\left(\frac{k m n a^2}{B_1 M^2}\right) \exp\left[\frac{i\pi a^2}{B_1 \lambda M^2}(A_1 m^2 + D_1 n^2)\right] \quad (11)$$

$$P_{2mm} = -\frac{i^{n+1} kma^2 \exp(ikL)}{B_2 M^2} J_n \left( \frac{kmna^2}{B_2 M^2} \right) \exp \left[ \frac{i\pi a^2}{B_2 \lambda M^2} (A_2 m^2 + D_2 n^2) \right] \quad (12)$$

对于稳定的模式分布, 光场在谐振腔中经过一次往返后实现自再现, 因此, 本征向量满足

$$\vec{E}_3 = \nu \vec{E}_1 \quad (13)$$

其中  $\nu$  为与  $r$  坐标无关的常数相位因子。

根据(9), (10), (13),  $r$  方向本征模的矩阵方程为

$$\nu \vec{E}_1 = (\vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1) \cdot \vec{E}_1 = \vec{P} \cdot \vec{E}_1 \quad (14)$$

显然, 只要求出往返变换矩阵  $\vec{P}$  的本征向量和本征值, 即可获得圆镜平凹腔的本征模场分布及损耗。

若平面镜反射率为非均匀的高斯分布, 写出光场反射率为

$$r(r_1) = H \exp[-K(r_1/a)^2] \quad (15)$$

其中,  $H$  为镜中心的光场反射率,  $0 \leq H \leq 1$ ;  $K$  为反射率的分布系数, 当  $K=0$  时, 平面镜的反射率为均匀分布。不考虑平面镜的输出透过率, 取  $H=1$ , 由(11), (12), (15), 可以写出高斯反射率圆镜平凹腔的变换矩阵  $\vec{P}_1$  和  $\vec{P}_2$  的元素

$$P_{1mm} = -\frac{i^{n-1} kma^2 \exp(ikL)}{B_1 M^2} J_n \left( \frac{kmna^2}{B_1 M^2} \right) \exp \left[ \frac{i\pi a^2}{B_1 \lambda M^2} (A_1 m^2 + D_1 n^2) \right] \quad (16)$$

$$P_{2mm} = -\frac{i^{n-1} kma^2 \exp(ikL)}{B_2 M^2} \exp[-K(m/M)^2] J_n \left( \frac{kmna^2}{B_2 M^2} \right) \exp \left[ \frac{i\pi a^2}{B_2 \lambda M^2} (A_2 m^2 + D_2 n^2) \right] \quad (17)$$

方程(14), (16), (17) 即为高斯反射率圆镜平凹腔沿  $r$  方向本征模的矩阵表达式。

#### 4 计算结果分析

利用方程(14)和(11), (12), (16), (17), 分别计

算了圆镜平凹腔、平面镜反射率为高斯分布的圆镜平凹腔的本征值和本征向量, 计算使用的参数为:  $R=5.0$  m,  $L=1.4$  m,  $a=1.6$  cm,  $\lambda=10.6$   $\mu$ m。

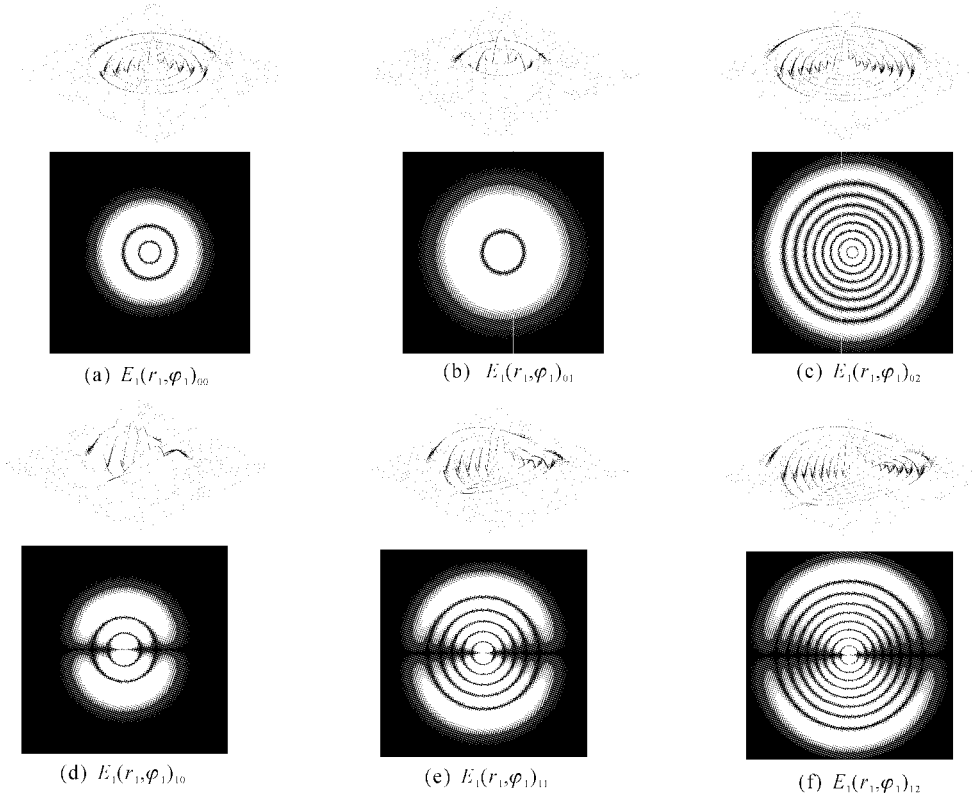


图 2 圆镜平凹腔低损耗本征模的场分布

Fig. 2 Field distribution of low loss mode in the circular plano-concave resonator

本征值的计算结果参见表 1, 显然, 对圆镜平凹腔 ( $K = 0$ ), 几个本征向量所对应的本征值较大且差别较小, 即损耗较小, 都可以振荡输出。若平面镜上反射率为高斯分布, 当分布系数  $K = 5$  时, 本征值较大的向量为  $\vec{E}_{00}$  和  $\vec{E}_{10}, \vec{E}_{01}$ , 由于前者与后两者之间差别较大, 故 00 模将优先起振。

表 1 低损耗模式的本征值  $|\nu|$   
Table 1 Eigenvalues of low loss mode  $|\nu|$

Distribution coefficient Eigen vector	$K = 0$	$K = 5$
$(\vec{E}_1)_{00}$	0.9997	0.9024
$(\vec{E}_1)_{01}$	0.9997	0.7352
$(\vec{E}_1)_{02}$	0.9997	0.5990
$(\vec{E}_1)_{10}$	1.0000	0.8148
$(\vec{E}_1)_{11}$	1.0000	0.6638
$(\vec{E}_1)_{12}$	0.9999	0.5408

将计算出的本征向量代入(6)式, 得到圆镜平凹腔 ( $K = 0$ ) 本征模的场分布, 如图 2 所示, 对分布系

数  $K = 5$  的高斯反射率圆镜平凹腔, 得到如图 3 所示本征模的场分布。

参见图 2, 平面镜为均匀反射率 ( $K = 0$ ) 时, 模式分布呈高阶模花样, 由于这几个模式的损耗较小, 最终形成振荡的激光输出将是这几个模式的干涉叠加, 分布将更为复杂, 因而难以获得优质的输出光束。计算还表明, 普通圆镜平凹腔要获得选模能力, 只有加大腔长或减小平凹镜的几何尺寸, 即当谐振腔的非涅耳数较小时, 才能加大模式间损耗的差距。

如果平面镜反射率呈高斯分布, 本征模的损耗大于普通圆镜平凹腔, 并且各阶模式的损耗有较大的差异, 因此, 其选模能力大大加强; 再者, 由于各阶模式呈传统的低阶模花样 (如图 3), 因而可以获得高质量的输出光束。总之, 只要选择合适的分布系数  $K$ , 就可在特定的增益情况下获得单模 (00 模) 输出。另外, 我们还对具有超高斯分布反射率的平凹腔进行了数值计算, 结果表明, 对于  $\text{CO}_2$  激光, 其选模能力不如高斯分布反射率的平凹腔。

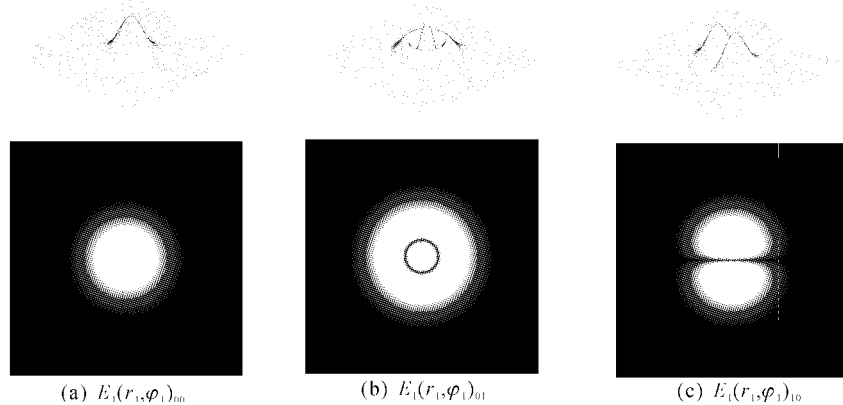


图 3 高斯反射率圆镜平凹腔低损耗本征模的场分布

Fig. 3 Field distribution of low loss mode in the circular plano-concave resonator with Gaussian-reflectivity mirror

### 参 考 文 献

- G. Bostanjoglo, N. Hodgson. Unstable multi-rod Nd:YAG lasers with variable reflectivity mirrors [C]. SPIE, 1994, **2206**:459~465
- C. Pare, P. A. Belanger. Custom laser resonators using graded-phase mirrors [J]. IEEE J. Quantum Electron., 1992, **28**:355~362
- Baida Lü. Propagation and Control of High-power Lasers [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999. 77~108 (in Chinese)
- Wei Zaifu, Wang Runwen, Wang Zhijiang. Numerical analysis of mode-fields of unstable ring resonators with  $90^\circ$  beam rotation [J]. Acta Optica Sinica (光学学报), 1995, **15**(6):696~702 (in Chinese)
- S. A. Collins, Jr.. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 1970, **60**(9):1168~1177
- B. Lü, H. Ma, B. Zhang. Propagation properties of cosh-Gaussian beams [J]. Opt. Comm., 1999, **164**:165~170
- A. Belafhal, M. Ibnchaikh. Propagation properties of Hermite-cosh-Gaussian laser beams [J]. Opt. Comm., 2000, **186**:269~276