

文章编号: 0258-7025(2003)01-0045-04

# 用琼斯传输矩阵法研究二阶偏振模 色散的统计特性

郑远, 刘玉敏, 杨伯君, 张晓光

(北京邮电大学理学院物理部, 北京 100876)

**摘要** 利用琼斯传输矩阵法研究了二阶偏振模色散的统计特性。对数值模拟中出现的偏振模色散随步长变化的问题做了相应的修正, 利用修正后的模型得到了偏振模色散矢量的频率相关特性; 模拟了偏振模色散值为 25 ps 时二阶偏振模色散的几率分布, 所得结果与理论结果能够很好地吻合; 简单地分析了脉宽为 8 ps 的高斯脉冲在此条件下的展宽情况, 指出了高阶补偿的必要性。

**关键词** 物理光学; 二阶偏振模色散; 琼斯传输矩阵; 统计特性

中图分类号 O 436.3 文献标识码 A

## Study of the Statistical Characteristics of Second-order Polarization Mode Dispersion by Jones Transfer Matrix Method

ZHENG Yuan, LIU Yu-min, YANG Bo-jun, ZHANG Xiao-guang

(Department of Physics, School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract** Statistical characteristics of second-order polarization mode dispersion ( $2^{\text{nd}}$ -PMD) are investigated by Jones Transfer Matrix method. The model in which the value of PMD varies with step size in simulation is corrected. Using this corrected model, the frequency correlation function of PMD vector and the probability distribution of  $2^{\text{nd}}$ -PMD are obtained when the value of PMD is 25 ps; the results show good agreements with the theoretical prediction. It is necessary to higher-order compensation in these conditions by analyzing the pulse broadening of an 8 ps-width Gauss pulse briefly.

**Key words** physical optics; second-order polarization mode dispersion ( $2^{\text{nd}}$ -PMD); Jones Transfer Matrix; statistical characteristics

随着光纤放大器的发展和群速度色散补偿技术的进展, 偏振模色散(PMD)已成为发展高码速率长距离光纤通信系统的主要障碍。1986年, C. D. Poole等提出了偏振主态的概念<sup>[1]</sup>, 揭开了研究偏振模色散的序幕。人们在补偿偏振模色散时发现: 补偿时如果不考虑偏振模色散的频率特性, 即所谓的一阶补偿, 补偿后系统的性能要受到速率和传输距离的限制<sup>[2]</sup>。目前认为 40 Gb/s 以上的光通信系统, 和早期光网上建立的 10 Gb/s 长距离系统都必须考虑偏振模色散的频率特性, 即高阶偏振模色散。高

阶偏振模色散对系统的影响主要表现在加大了系统的故障概率(outage probability), 特别是在与色散和频率啁啾等效效应相结合时, 这种影响会更明显<sup>[3,4]</sup>, 因此, 研究高阶偏振模色散的统计特性可以为评价系统性能和补偿高阶偏振模色散提供依据。国内对一阶偏振模色散的统计特性做了一些研究, 而对二阶偏振模色散的统计特性还处于起步阶段。

对于偏振模色散统计特性的研究, 可以用偏振模色散矢量的动态方程<sup>[5]</sup>, 也可以利用琼斯传输矩阵<sup>[6]</sup>。然而很难用动态方程来直接评价偏振模色散

收稿日期: 2001-11-02; 收到修改稿日期: 2001-12-21

基金项目: 国家自然科学基金(编号: 60072042)、教育部博士点基金和北京邮电大学校基金资助项目。

作者简介: 郑远(1976—), 男, 北京邮电大学理学院物理部, 博士生, 硕士期间从事全光波长变换器和声光耦合器件的研究, 现从事高速光通信系统中偏振模色散的研究。E-mail: bjnyang@bupt.edu.cn or zhengyuan@263.net

对系统性能的影响,而琼斯矩阵在这方面有独特的优势,既可以用于理论推导,也可以用于数值模拟。然而在用于数值模拟时,偏振模色散的大小与光纤参数很难直接联系起来,这给评价系统性能带来了困难。本文将采用琼斯传输矩阵研究二阶偏振模色散的统计特性,在数值模拟时采用一种修正方法,使偏振模色散的大小与光纤参数的关系简单明了。同时由于本文所用的琼斯传输矩阵是由从耦合的非线性薛定谔(CNLS)方程或是Manakov方程中提取出来的,如果证明了由此矩阵得到的偏振模色散统计特性与理论或实验结果相符合,也就证明了CNLS方程或Manakov方程统计特性的正确性,为应用CNLS方程或Manakov方程研究问题打下基础。

## 1 理论模型与算法

由偏振模色散的CNLS方程或Manakov方程<sup>[7]</sup>出发,忽略色散、非线性及与偏振有关的增益或损耗,得到琼斯传输矩阵满足的方程为

$$i \frac{\partial M}{\partial z} + (b + b' \omega) \Sigma(z) M = 0 \quad (1)$$

式中,  $M$  为琼斯传输矩阵,是频率和距离的函数,其初始条件为  $M(z=0, \omega) = I$ ,  $I$  为  $2 \times 2$  的单位矩阵,双折射强度  $b = (\beta_1 - \beta_2)/2$ ,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别为本地双折射轴上的传播常数,  $b' = db/d\omega$ , 表示单位长度的群时延, 矩阵  $\Sigma(z) = \sigma_3 \cos[2\alpha(z)] + \sigma_1 \sin[2\alpha(z)]$  表示本地双折射轴方位随距离的变化,其中  $\sigma_1$  与  $\sigma_3$  为泡利矩阵,  $\alpha(z)$  为本地双折射轴的方位角。

在数值模拟中,将整个计算长度分为很多的小步长  $\xi$ , 假设在第  $j$  个步长的  $\alpha_j$  是常数,并且每两步之间的  $\alpha$  彼此独立无关,这样可以得到方程(1)在该步长中的解为  $m_j(\omega) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ , 其中

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = \cos[(b + b' \omega) \xi] + \\ & i \cos(2\alpha_j) \sin[(b + b' \omega) \xi] \\ m_{12} &= m_{21} = i \sin(2\alpha_j) \sin[(b + b' \omega) \xi] \end{aligned}$$

计算长度内的总的传输矩阵为

$$M(\omega) = \prod_{j=0}^N m_j(\omega) = \begin{bmatrix} M_{11}(\omega) & M_{12}(\omega) \\ M_{21}(\omega) & M_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$N$  为总的步数。可以证明由(2)式计算的  $M$  是归一化的幺正矩阵,即  $M_{22}^* = M_{11}$ ,  $M_{21}^* = -M_{12}$ ,  $|M_{11}|^2 + |M_{12}|^2 = 1$ , 这与文献[1]中的  $U(\omega)$  一致,  $M$  的

频率特性反映了高阶偏振模色散的特性,这样就可以通过  $M$  计算出不同频率点的偏振模色散矢量,从而可以计算出一阶和高阶偏振模色散的大小。

下面讨论解方程(1)所用的数值算法。方程(1)中的参数  $b$ ,  $b'$  及  $\alpha$  与光纤可测量的参数联系起来。根据文献[8, 9]可以给出如下关系

$$\begin{aligned} b &= \pi/L_{\text{beat}} \\ b' &= 0.5D_{\text{pmd}}/(2L_{\text{corr}})^{1/2} \\ \sqrt{\langle(\Delta\alpha)^2\rangle} &= \sqrt{\xi/(2L_{\text{corr}})} \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $L_{\text{beat}}$  为双折射拍长,  $D_{\text{pmd}}$  为偏振模色散系数,  $L_{\text{corr}}$  为光纤自相关长度,  $\sqrt{\langle(\Delta\alpha)^2\rangle}$  为方位角变化的标准差。

在计算中,首先给定方程(3)中的光纤参数。对于每一小段中所用的随机数作这样的处理:采用高斯随机数的形式,其均值为0,标准差为  $\sqrt{\langle(\Delta\alpha)^2\rangle}$ 。每一小段对不同的频率进行计算,求得矩阵  $m_j(\omega)$ ,从而可以求得一段光纤在不同频率点处的琼斯传输矩阵  $M(\omega)$ ,根据文献[1]可以求得相应的偏振模色散矢量,对其求导即可得到高阶偏振模色散矢量。对于模拟中出现的偏振模色散值随步长变化的问题<sup>[7]</sup>,可以通过修正  $b'$  来解决,将  $b'$  乘一个修正因子  $\sqrt{2L_{\text{corr}}/\xi}$  后,得到  $b' = 0.5D_{\text{pmd}}/\sqrt{\xi}$ , 这个修正的正确性将在数值模拟中得到验证。

## 2 数值结果及讨论

首先,我们将验证第2节中修正的正确性,在模拟中所取的光纤参数为:  $L_{\text{corr}} = 0.1$  km,  $L_{\text{beat}} = 0.05$  km,  $D_{\text{pmd}} = 0.1$  ps/ $\sqrt{\text{km}}$ , 频率采样点的间隔  $\Delta\omega = 20$  GHz, 计算长度为100 km, 重复计算2000次。分别计算了步长为10 m, 2 m和0.02 m时的情况,比较结果如表1所示。从表中可以明显地看到,在未修正以前,随着步长的增加,所得到的偏振模色散值,无论是均值还是均方根值,都随之增加。当步长为200 m时,此时修正因子等于1,修正前后的结果是一致的。然而在实际的数值模拟中取这样的步长是有局限性的,它虽然适用于模拟一阶偏振模色散,但在模拟大偏振模色散的情况下,必须考虑偏振模色散矢量的频率依赖性即高阶偏振模色散,在这样大的步长内计算  $M$  的频率特性是不准确的,因此必须把步长取小,才能正确地模拟出高阶偏振模色散。然而当步长不等于200 m时,必须加以修正。表1中的  $E(\cdot)$  表示求

平均, 从表 1 可以看出经过修正以后, 不论步长多小, 结果相当一致, 证明了这种修正的正确性。

表 1 修正前后的结果比较

Table 1 Comparison between uncorrected results and corrected results

| Size of $\xi/m$             |             | 200   | 10    | 2     | 0.02    |
|-----------------------------|-------------|-------|-------|-------|---------|
| $E( \Delta\tau )/ps$        | Uncorrected | 0.923 | 0.203 | 0.094 | 0.00909 |
|                             | Corrected   | 0.921 | 0.907 | 0.939 | 0.907   |
| $\sqrt{E(\Delta\tau^2)}/ps$ | Uncorrected | 1.025 | 0.221 | 0.102 | 0.010   |
|                             | Corrected   | 1.020 | 0.987 | 1.018 | 1.003   |

下面对 40 Gb/s 光通信中的偏振模色散进行研究。取一种极限情况, 偏振模色散值为一个比特周期, 对 40 Gb/s 光通信系统来说为 25 ps。模拟中所用的参数为:  $L_{\text{corr}} = 0.1$  km,  $L_{\text{beat}} = 0.05$  km,  $D_{\text{pmd}} = 2.5$  ps/ $\sqrt{\text{km}}$ , 频率采样点的间隔  $\Delta\omega = 2.5$  GHz, 总的计算频率范围为 125 GHz, 步长 2 m, 计算长度为 100 km, 单频率点计算次数为 10000 次, 下面给出模拟结果。

图 1 是用琼斯传输矩阵模拟的差分群时延  $\Delta\tau$ (DGD) 的几率分布图, 图中的实线为理论上的 Maxwell 函数, 可以看出模拟的几率分布能很好地满足 Maxwell 分布, 证明了用琼斯传输矩阵方法研究偏振模色散的正确性。另外根据模拟数据给出的偏振模色散值的大小:  $E(\Delta\tau) = 22.867$  ps,  $\sqrt{E[(\Delta\tau)^2]} = 24.815$  ps, 可以看出经过修正后的模拟结果与理论上的 25 ps 能够很好地吻合。

图 2 表示模拟的偏振模色散矢量的归一化相关特性, 实线是文献[10]给出的理论结果, 其中  $\hat{\epsilon}(\omega)$  是偏振模色散矢量,  $\hat{\epsilon}_\omega(\omega)$  是偏振模色散矢量对角频率的导数。从图中可看出对于  $E[\hat{\epsilon}(\omega_1) \cdot \hat{\epsilon}(\omega_2)]$ , 模拟数据随频率间隔的降落速度要略快

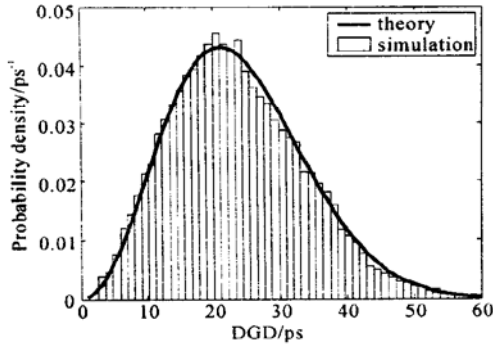


图 1 差分群时延的几率分布

Fig. 1 Probability distribution of DGD

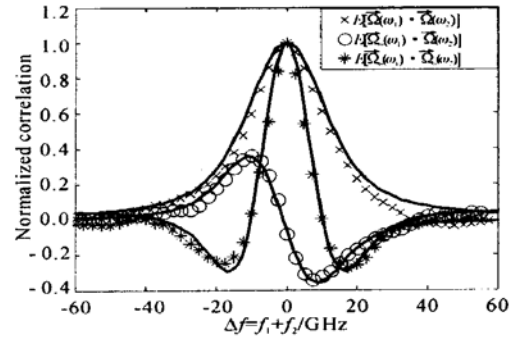


图 2 归一化相关函数

Fig. 2 Normalized correlation function

于理论结果, 特别是当频率间隔比较大的时候, 这种差别更明显, 从文献[10]给出的实验结果看这种差别是合理的。而对于  $E[\hat{\epsilon}_\omega(\omega_1) \cdot \hat{\epsilon}_\omega(\omega_2)]$  和  $E[\hat{\epsilon}_\omega(\omega_1) \cdot \hat{\epsilon}_\omega(\omega_2)]$ , 模拟结果与理论结果吻合得较好。图 2 还显示, 当偏振模色散值达到 25 ps 时, 频率间隔为 40 GHz 处偏振模色散矢量的归一化相关函数值小于 0.1。对于 40 Gb/s 的光通信系统, 特别是对于使用归零(RZ)码的光时分复用(OTDM)系统, 其频谱中 40 GHz 分量处的强度还相当大, 如果仍使用中心频率处的偏振模色散作一阶近似, 这样会带来很大的误差, 因此研究这些系统中的偏振模色散时必须考虑高阶偏振模色散效应。

偏振模色散矢量可以表示为  $\hat{\epsilon} = \Delta\tau \cdot \hat{q}$ ,  $\Delta\tau$  表示差分群时延,  $\hat{q}$  是表示偏振模色散矢量方向的单位矢量。二阶偏振模色散矢量可以表示为

$$(\Delta\tau \cdot \hat{q})_\omega = \Delta\tau_\omega \cdot \hat{q} + \Delta\tau \cdot \hat{q}_\omega \quad (4)$$

脚标  $\omega$  表示对角频率求导,  $\Delta\tau_\omega$  表示偏振相关的色散(PCD),  $\hat{q}_\omega$  表示去偏振效应。图 3(a), (b), (c) 分别表示偏振相关色散、去偏振效应及总的二阶偏振模色散的几率分布规律, 实线是理论结果<sup>[11-13]</sup>, 其中  $E(\Delta\tau)$  和  $\sqrt{E[(\Delta\tau)^2]}$  由图 1 处的模拟数据给出, 可以看出模拟的数据与理论预测的结果能够很好地吻合。根据模拟数据得出  $E[(\Delta\tau_\omega)^2] = 1.4306 \times 10^4$  ps<sup>4</sup>,  $E[|\Delta\tau \cdot \hat{q}_\omega|^2] = 1.1347 \times 10^5$  ps<sup>4</sup>,  $E[|(\Delta\tau \cdot \hat{q})_\omega|^2] = 1.2752 \times 10^5$  ps<sup>4</sup>。与由图 1 所得的数据联系起来, 可以得到关系式

$$E[(\Delta\tau_\omega)^2] = 26.5^{-1} E[(\Delta\tau)^2]^2$$

$$E[|\Delta\tau \cdot \hat{q}_\omega|^2] = 3.34^{-1} E[(\Delta\tau)^2]^2$$

$$E[|(\Delta\tau \cdot \hat{q})_\omega|^2] = 2.97^{-1} E[(\Delta\tau)^2]^2$$

$$E[(\Delta\tau_\omega)^2] = 8.91^{-1} E[|(\Delta\tau \cdot \hat{q})_\omega|^2]$$

$$E[|\Delta\tau \cdot \hat{q}_\omega|^2] = 1.12^{-1} E[|(\Delta\tau \cdot \hat{q})_\omega|^2]$$

其中的系数  $26.5^{-1}$ ,  $3.34^{-1}$ ,  $2.97^{-1}$ ,  $8.91^{-1}$ ,  $1.12^{-1}$  与文献[11~13]的理论结果  $27^{-1}$ ,  $(27/8)^{-1}$ ,  $3^{-1}$ ,  $9^{-1}$ ,  $(9/8)^{-1}$  相比较, 其差值在允许的范围之内。

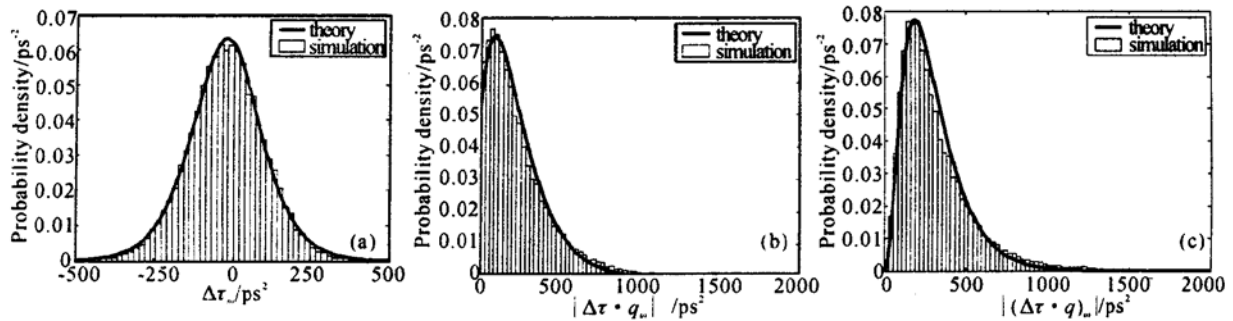


图3 偏振相关色散(a), 二阶偏振模色散矢量去偏振效应(b)和二阶偏振模色散(c)的几率分布

Fig. 3 Probability distribution of PCD (a), depolarization associated with 2<sup>nd</sup>-order PMD (b) and 2<sup>nd</sup>-order PMD (c)

从模拟数据看, 用琼斯传输矩阵研究偏振模色散, 既可以得到一阶偏振模色散的统计特性, 也可以得到二阶甚至更高阶偏振模色散的统计特性. 还能正确地反映偏振模色散矢量的频率相关性, 而琼斯传输矩阵可以由 CNLS 方程或 Manakov 方程去掉非线性项及色散项得到, 因此, 有理由相信, 用这两个方程模拟一阶和高阶偏振模色散对系统性能的影响是合理的。

为了简单起见, 不考虑色散、啁啾及非线性效应, 只考虑偏振模色散对高斯脉冲  $\exp\left[-\frac{T^2}{2T_0^2}\right]$  脉宽<sup>[14]</sup>的影响。定义脉冲的均方展宽为  $b = \sqrt{E(\tau^2/\tau_0^2)}$ ,  $\tau$  为脉冲传输后的均方脉宽,  $\tau_0$  为脉冲的初始脉宽. 取初始半高全宽  $T_{\text{FWHM}}$  为 8 ps, 则  $T_0 = 8/1.665 = 4.8$  ps,  $\tau_0 = T_0/\sqrt{2} = 3.3975$  ps. 根据文献[14]给出的公式计算得: 未补偿时, 均方展宽  $b_{\text{unc}} = 3.56$ , 考虑一阶补偿后的脉宽, 后向传输法补偿后均方展宽  $b_{\text{1st}} = 3.6$ , 主态传输法补偿后脉冲均方展宽  $b_{\text{1st}} = 3.06$ . 如果考虑高阶补偿, 根据文献[15]给出的公式计算补偿后的脉冲均方展宽  $b_{\text{2nd}} = 2.44$ . 可见在此情况下, 后向传输补偿方法完全失去效果, 甚至起相反的作用; 而主态传输补偿法的作用也微乎其微; 高阶补偿则取得了一定的效果, 可见在这种情况下高阶补偿是必要的。

### 参 考 文 献

- C. D. Poole, R. E. Wagner. Phenomenological approach to polarization dispersion in long single-mode fibers [J]. *Electron. Lett.*, 1986, **22**(19): 1029~1030
- J. M. Fini, H. A. Haus. Accumulation of polarization mode dispersion in cascades of compensated optical fibers [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2001, **13**(2): 124~126
- W. Shieh. On the second order approximation of PMD [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12**(3): 290~292
- S. Lanne, D. Penninckx, J. P. Thiery *et al.*. Impact of chirping on polarization mode dispersion compensated systems [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12**(11): 1492~1494
- G. J. Foschini, C. D. Poole. Statistical theory of polarization dispersion in single mode fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1991, **9**(11): 1439~1456
- N. Gisin, J. P. Pellaus. Polarization mode dispersion: Time versus frequency domains [J]. *Opt. Comm.*, 1992, **89**: 316~323
- D. Marcuse, C. R. Menyuk, P. K. A. Wai. Application of the Manakov-PMD equation to studies of signal propagation in optical fibers with randomly varying birefringence [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1997, **15**(9): 1735~1746
- P. K. A. Wai, C. R. Menyuk. Polarization decorrelation in optical fibers with randomly varying birefringence [J]. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(19): 1517~1519
- P. K. A. Wai, C. R. Menyuk. Polarization mode dispersion, decorrelation, and diffusion in optical fibers with randomly varying birefringence [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1996, **14**(2): 148~157
- M. Karlsson. Polarization mode dispersion-induced pulse broadening in optical fibers [J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(9): 688~690
- G. J. Foschini, R. M. Jopson, L. E. Nelson *et al.*. The statistics of PMD-induced chromatic fiber dispersion [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1999, **17**(9): 1560~1565
- R. M. Jopson, L. E. Nelson, H. Kogelnik *et al.*. Probability densities of depolarization associated with second-order pmD in optical fibers [C]. OFC'2001, ThA4
- G. J. Foschini, L. E. Nelson, R. M. Jopson *et al.*. Probability densities of second order polarization mode dispersion including polarization dependent chromatic fiber dispersion [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12**(3): 293~295
- H. Sunnerud, M. Karlsson, P. A. Andrekson. Analytical theory for PMD-compensation [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 2000, **12**(1): 50~52
- M. Karlsson, C. Xie, H. Sunnerud *et al.*. Higher order polarization mode dispersion compensator with three degrees of freedom [C]. OFC'2001, MO1