文章编号：0258-7025(2002)Supplement-0317-04

有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束的 M^2 因子：广义截断二阶矩法*

卿与三[1,2] 吕百达[1]
([1] 四川大学激光物理与化学研究所，成都 610064
[2] 宜宾学院物理系，宜宾 644007)

提要 采用广义截断二阶矩法，推导出了用不完善伽玛函数表示的有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束广义 M_G^2 因子的解析公式，它由厄米-高斯光束的阶数 n 和截断参数 α 所确定，对此进行了数值计算和分析，并对所得解析结果的特殊情况作了深入的讨论。

关键词 厄米-高斯光束，硬边光阑，广义 M^2 因子(M_G^2 因子)，广义截断二阶矩法
中图分类号 O435 **文献标识码** A

M^2-factor of Hermite-Gaussian Beams with Hard-edge Aperture: Generalized Truncated Second-order Moments Method

QING Yu-san[1,2] LÜ Baida[1]
([1] *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu* 610064
[2] *Department of Physics, Yibin College, Yibin* 644007)

Abstract By using the generalized truncated second-order moments method, the closed-form expression for the M^2-factor of Hermite-Gaussian beams with hard-edge aperture is derived, which is written in terms of the incomplete Gamare function and dependent on the beam order n and trancation parameter α. Numerical calculations are performed and analyzed. Furthermore, some special cases of our analytical expression are discussed.

Key words Hermite-Gaussian beam; hard-edge aperture; generalized M^2-factor (M_G^2-factor); generalized truncated second-order moments method

1 引 言

在激光的实际应用中，光束质量是一个重要研究课题。由 Siegman 教授倡导基于二阶矩定义的光束传输因子(M^2 因子)[1]在理想近轴光学系统中是一个不变量，且同时反映光束近场和远场的分布特性，因此，国际标准化组织(ISO)将 M^2 因子作为衡量激光光束质量的重要参数[2]。但是在实际应用中，基于二阶矩定义的 M^2 因子在有硬边光阑存在时遇到积分发散的困难。因此，如何评价有硬边光阑衍射激光光束的光束质量成为一个应当认真研究的课题。迄今为止，为克服积分发散困难，已提出了不少方法，例如，广义截断二阶矩法[3,4]、渐近近似法[5~7]、自收敛束宽法[8]、有窗口维格纳函数权重矩法[9]等。本文以有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束为例，采用广义截断二阶矩法，经繁冗但严格的推导，得出用不完善伽玛函数表示的广义 M_G^2 因子的解析计算公式，作了数值计算和分析，并就实际应用中感兴趣的两个特例进行了深入的讨论，所得结果对有硬边光阑衍射时激光光束质量评价有应用意义。

2 有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束的 M^2 因子

一维厄米-高斯光束在光腰处($z=0$)的场分布为

$$E(x,0)=\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)H_n\left(\sqrt{2}\,\frac{x}{w_0}\right) \tag{1}$$

* 激光技术国家重点实验室和四川省重点科技资助课题。

式中 w_0 是厄米-高斯光束对应基模高斯光束的束腰宽度，x 是位置坐标，H_n 是 n 阶厄米多项式。

设 I_0 为入射到半宽度为 a 的光阑内的功率，p 为光阑内的功率占总功率的百分比，则

$$I_0 = \int_{-a}^{a} |E(x,0)|^2 \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$p = I_0 \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 \mathrm{d}x \tag{3}$$

利用伽玛函数 $\Gamma(t)$ 和不完善伽玛函数 $\gamma(v,t)$ 的定义式[10]

$$\gamma(v,t) = \int_0^t e^{-u} u^{v-1} \mathrm{d}u$$

$$(|t| < \infty, \mathrm{Re}v > 0) \tag{4}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{t-1} \mathrm{d}u$$

$$(\mathrm{Re}t > 0) \tag{5}$$

将(1)式代入(2)和(3)式积分之，得

$$I_0 = \frac{\sqrt{2}\cdot 4^n}{2} w_0 \sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j} n!}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} \gamma(n-i-j+0.5, 2\alpha^2) \tag{6}$$

$$p = \frac{\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j} n!}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} \gamma(n-i-j+0.5, 2\alpha^2)}{\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j} n!}{i!j!(n-2)!(n-2j)!} \Gamma(n-i-j+0.5)} \tag{7}$$

式中 $\alpha = a/w_0$ 为截断参数。广义截断二阶矩的定义为[3,4]：

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_{-a}^{a} x^2 |E(x)|^2 \mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k^2 I_0} \int_{-a}^{a} |E'(x)| \mathrm{d}x + \frac{4}{k^2 I_0 a} [|E(a)|^2 + |E(-a)|^2] \tag{9}$$

$$\langle xu \rangle = \frac{1}{2ikI_0} \int_{-a}^{a} \{x[E'(x)]^* E(x) - xE'(x)E^*(x)\} \mathrm{d}x \tag{10}$$

式中 $\langle x^2 \rangle$，$\langle u^2 \rangle$ 分别表示空域和频域中光强的二阶矩，$\langle xu \rangle$ 是交叉矩，$k = 2\pi/\lambda$ 为波数，λ 为波长。

将(1)式代入(8)式～(10)式并利用(4)式，经繁冗的积分计算，将最后结果整理为：

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2_0^2}{2} \frac{\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} \gamma(n-i-j+1.5, 2\alpha^2)}{\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} \gamma(n-i-j+0.5, 2\alpha^2)} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\langle u^2 \rangle = \frac{1}{k^2 I_0} \Big\{ & \frac{\sqrt{2}}{w_0} \cdot 4^n \sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j} n!}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} [\gamma(n-i-j+1.5, 2\alpha^2) - \\ & 2(n-i-j)\gamma(n-i-j+0.5, 2\alpha^2) + (n-2i)(n-2j)\gamma(n-i-j-0.5, 2\alpha^2)] + \\ & \frac{8}{a} \cdot 4^n e^{-2\alpha^2} \sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j} n!}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} (2\alpha^2)^{n-i-j} \Big\}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\langle xu \rangle = 0 \tag{13}$$

将(11)式～(13)式代入

$$\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle = (M_G^2 / 2k)^2 \tag{14}$$

得

$$\begin{aligned} M_G^2 = 2k\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle} = \Big\{ \Big[& \sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} [\gamma(n-i-j+1.5, 2\alpha^2) - \\ & 2(n-i-j)\gamma(n-i-j+0.5, 2\alpha^2) + (n-2i)(n-2j)\gamma(n-i-j-0.5, 2\alpha^2)] + \\ & \frac{4\sqrt{2}}{\alpha} e^{-2\alpha^2} \sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2} \frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!} (2\alpha^2)^{n-i-j} \Big] \times \end{aligned}$$

$$\left[\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2}\frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!}\gamma(n-i-j+1.5,2\alpha^2)\right]^{1/2}\times$$
$$\left[\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2}\frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!}\gamma(n-i-j+0.5,2\alpha^2)\right]^{-1} \tag{15}$$

(15)式是有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束 M_G^2 因子的解析表示式。从(15)式可以看出，有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束因子 M_G^2 由厄米-高斯光束的阶数和截断参数两个参数所确定。现对(15)式的两个特例加以讨论：

(1) $\alpha\to\infty$（即 $a\to\infty$）时，

$$M_G^2=2\left\{\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2}\frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!}[\Gamma(n-i-j+1.5)-2(n-i-j)\Gamma(n-i-j+0.5)+\right.$$
$$\left.(n-2i)(n-2j)\Gamma(n-i-j-0.5)]\left[\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2}\frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!}\Gamma(n-i-j+1.5)\right]\right\}^{1/2}\times$$
$$\left[\sum_{i=0}^{n/2}\sum_{j=0}^{n/2}\frac{(-1/4)^{i+j}}{i!j!(n-2i)!(n-2j)!}\Gamma(n-i-j+0.5)\right]^{-1} \tag{16}$$

利用积分公式[11]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases} \tag{17}$$

以及厄米多项式的递推公式[11]

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \tag{18}$$

由(16)式推导得

$$M_G^2=2n+1 \tag{19}$$

这一结果表明在无光阑限制时厄米-高斯光束的光束传输因子 M_G^2 与束宽无关，由厄米-高斯光束的阶数唯一确定，且随厄米-高斯光束的阶数的增加呈线性增加。当厄米-高斯光束阶数 $n=0$ 时，就回到基模高斯光束，此时的光束传输因子 $M_G^2=1$。以上结果与文献[12]一致。

(2) 当 $n=0$ 时，厄米-高斯光束退化为基模高斯光束。将 $n=0$ 代入(15)式，得

$$M_G^2=\frac{2\sqrt{[\gamma(1.5,2\alpha^2)+(4\sqrt{2}/\alpha)e^{-2\alpha^2}]\gamma(1.5,2\alpha^2)}}{\gamma(0.5,2\alpha^2)} \tag{20}$$

利用不完善伽码函数的递推公式[11]

$$\gamma(\alpha+1,x)=\alpha\gamma(\alpha,x)-x^{\alpha}\exp(-x) \tag{21}$$

和不完善伽码函数与误差函数 erf 之间的关系式[10]

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right) \tag{22}$$

得

$$M_G^2=\sqrt{1+4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{\alpha}-\alpha\right)\mathrm{erf}^{-1}(2^{1/2}\alpha)\exp(-2\alpha^2)+\frac{8}{\pi}(\alpha^2-4)\mathrm{erf}^{-2}(2^{1/2}\alpha)\exp(-4\alpha^2)} \tag{23}$$

与文献[4]的结果一致。

3　数值计算和分析

利用(7)式和(15)式进行数值计算，计算结果分别如图1和图2所示。图1是不同阶数厄米-高斯光束入射功率百分比 p 随截断参数 α 变化的曲线。从图1可见，当截断参数 α 相同时，入射到光阑内的厄米-高斯光束的功率含量百分比 p 随阶数 n 的增大而减小。说明低阶厄米-高斯光束的能量集中度比高阶厄米-高斯光束的能量集中度高。对相同的功率含量百分比，则阶数越高的厄米-高斯光束要求的截断参数越大。显然，这可由厄米-高斯光束的光强分布予以解释。图2给出了有硬边光阑衍射厄米-高斯光束光束的广义 M_G^2 因子随截断参数 α 的变化曲线。由图可知：(1)当 α 一定时，M_G^2 因子随阶数 n 的增大而增大；(2)当 n 一定时，当 α 较小时

M_G^2 因子随 α 的增大而减小；当 α 较大时 M_G^2 因子趋近于一个常数为 $2n+1$。

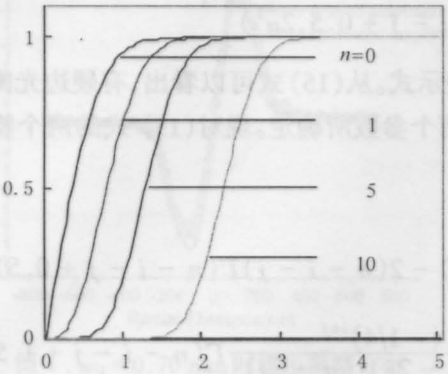

图 1　厄米-高斯光束入射到光阑内的功率含量百分比 p 随截断参数 α 的变化

Fig. 1　The power fraction p of Hermite-Gaussian beams entering through the aperture as a function of truncation parameter α

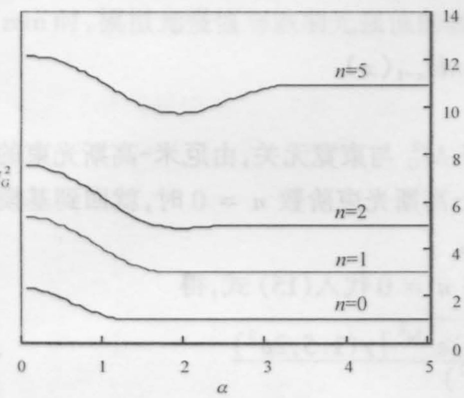

图 2　有硬边光阑限制厄米-高斯光束的广义 M^2 因子 (M_G^2 因子)随截断参数 α 的变化

Fig. 2　The generalized M^2-factor (M_G^2-factor) of apertured Hermite-Gaussian beams versus truncation parameter α

4　小　　结

本文利用广义截断二阶矩法，推出了有硬边光阑衍射时厄米-高斯光束的光束传输因子的解析表达式，它由厄米-高斯光束的阶数 n 和截断参数 α 决定。当光阑宽度 $a\to\infty$ 和厄米-高斯光束阶数 $n=0n=0$ 时，该公式就分别约化为无光阑限制厄米-高斯光束和有硬边光阑衍射高斯光束 M^2 因子公式。本项工作说明在有硬边光阑衍射的情况下，采用广义截断二阶矩法不仅能克服硬边衍射引起的“发散”困难，而且当光阑趋于无穷大时能回到由 Siegman 理论导出的结果，表明在有硬边光阑衍射的情况下，采用广义截断二阶矩法研究激光光束质量是可行的。但正如文献[4,6]所指出，该方法的使用尚存在一些问题，值得作进一步深入研究。

参　考　文　献

1　A. E. Siegman. New developments in laser resonators. *Proc SPIE*, 1990, **1224**:2～4

2　ISO Document. Terminology and test methods for lasers. ISO/TC 172/SC 9/WG 1 N80, 1995

3　R. Martinez-Herrero, P. M. Mejias, M. Arias. Parametric characterization of coherent, lowest-order Gauss beams propagating through hard-edged apertures. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(2):124～126

4　B. Lü, S. Luo. Beam propagation factor of hard-edge diffracted cosh-Gaussia. *Opt. Comm.*, 2000, **178**(4):275～281

5　P. A. Belanger, Y. Champagne, C. Pare. Beam propagation factor of diffracted laser beams. *Opt. Comm.*, 1994, **105**(3):233～242

6　C. Pare, P. A. Belanger. Propagation law and quasi-invariance properties of the truncated second-order moment of a diffracted laser beam. *Opt. Comm.*, 1996, **123**:679～693

7　B. Lü, S. Luo. Asymptotic approach to the truncated cosh-Gaussian beams. *Opt. Quant. Electron.*, 2001, **33**(1):107～113

8　S. Amarande, A. Giesen, H. Hügel. Propagation analysis of self-convergent beam width and characterization of hard-edge diffracted beams. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(22):3914～3924

9　M. Scholl, S. Muffer. Description of diffracted beams by weight moments. *Proc. SPIE*, 1996, **2870**:112～122

10　A. Erdelyi. *Tables of Integral Transforms*. Vol. 1, New York: McGrau-Hill, 1954, 387

11　《数学手册》编写组. 数学手册. 北京：高等教育出版社, 1979. 600～614

12　吕百达. 激光光学. 成都：四川大学出版社, 1992. 68