

文章编号: 0258-7025(2002)Supplement-0273-04

# 用张量方法研究部分相干光的传输特性\*

蔡阳健<sup>1</sup> 林强<sup>1</sup> 谢先闻<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 浙江大学物理系光学研究所, 杭州 310028)  
(<sup>2</sup> 浙江教育学院物理系, 杭州 310012)

**摘要:** 运用张量方法引入了描写一般部分相干非轴对称高斯-谢尔模(GSM)光束的  $4 \times 4$  阶部分相干复曲率张量  $M^{-1}$ , 导出了适用于部分相干光传输的张量 ABCD 定律。利用此定律研究分析了高斯-谢尔模经过薄透镜的聚焦特性。研究表明, 聚焦后光斑的大小以及聚焦点位置与部分相干光的横向相干宽度  $\sigma_g^2$ , 波前曲率等参数有关。部分相干非轴对称高斯-谢尔模光束的聚焦特性还跟扭曲因子密切相关。

**关键词:** 部分相干光; 张量 ABCD 定律; 聚焦特性

中图分类号: TN012 文献标识码: A

## Analysis of the Propagation Properties of Partially Coherent Beams by Using Tensor Method

CAI Yang-jian<sup>1</sup> LIN Qiang<sup>1</sup> Xie Xian-wen<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028)  
(<sup>2</sup> Department of Physics, Zhejiang Education Institute, Hangzhou 310012)

**Abstract** A new  $4 \times 4$  complex curvature tensor  $M^{-1}$  is introduced to describe partially coherent anisotropic Gaussian-Schell model beams (GSM). The propagation law of  $M^{-1}$  is also derived which may be called partially coherent tensor ABCD law. The focusing properties of GSM beam focused by a thin lens using the derived tensor ABCD law of partially coherent are calculated and analyzed. The result shows that the focusing properties of partially coherent GSM beam are closely related to the coherence length and phase front curvature. For the case of partially coherent anisotropic GSM beam, its focusing properties are also related to the twist factor.

**Key words** partially coherent beams, tensor ABCD law, focusing properties

### 1 引言

在激光物理和激光应用中,经常碰到部分相干光。高斯-谢尔模(GSM)光束是描写部分相干光的一种典型模型,它的传输特性一直是人们研究的热点<sup>[1,2]</sup>。对于带扭曲因子的非对称 GSM 光束,人们一直采用 Wigner 函数的方法研究它的传输变换特性<sup>[3,4]</sup>。Wigner 分布函数是处理部分相干光传输问题的一种间接的等效方法,运用起来不是很方便。

本文运用张量方法<sup>[5]</sup>引入了描写一般部分相干非轴对称 GSM 光束的部分相干复曲率张量  $M^{-1}$ ,

导出了适用于部分相干光传输的张量 ABCD 定律。利用部分相干光的张量 ABCD 定律研究分析了 GSM 经过薄透镜的聚焦特性。

### 2 部分相干光的张量表示及张量 ABCD 定律

一般的非轴对称 GSM 光束的交叉光谱密度可表示为<sup>[3,4]</sup>:

$$\Gamma(r_1, r_2) = G_0 \exp \left\{ -\frac{1}{4} [r_1^T (\sigma_1^2)^{-1} r_1 + r_2^T (\sigma_1^2)^{-1} r_2] - \frac{1}{2} (r_1 - r_2)^T (\sigma_g^2)^{-1} (r_1 - r_2) - \frac{ik}{2} (r_1 - r_2)^T (R^{-1} + \mu J) (r_1 + r_2) \right\} \quad (1)$$

\* 霍英东教育基金会青年教师基金(71009)、国家自然科学基金(60078003)和浙江省自然科学基金青年科技人才专项基金(RC98029)资助课题。

其中  $\sigma_l^2, \sigma_g^2, \mathbf{R}^{-1}$  均为  $2 \times 2$  阶转置对称矩阵:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_l^2)^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_{l11}^{-2} & \sigma_{l12}^{-2} \\ \sigma_{l12}^{-2} & \sigma_{l22}^{-2} \end{bmatrix}, \\ (\sigma_g^2)^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_{g11}^{-2} & \sigma_{g12}^{-2} \\ \sigma_{g12}^{-2} & \sigma_{g22}^{-2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}^{-1} &= \begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & R_{12}^{-1} \\ R_{12}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\sigma_l^2$  为横向光斑宽度矩阵,  $\sigma_g^2$  为横向相干宽度矩阵, 它们具有长度平方的量纲。 $\mathbf{R}^{-1}$  为波前曲率矩阵, 具

有长度倒数的量纲。 $\mathbf{J}$  为转置反对称矩阵:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\mu$  称为扭曲因子, 它是一个实数, 具有长度倒数的量纲。 $\mu$  为 0 时, 光束退化为各向同性的部分相干光。经过重新组合, (1) 式可以表示成如下形式:

$$\Gamma(\mathbf{r}) = G_0 \exp\left[-\frac{ik}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}\right] \quad (4)$$

其中  $\mathbf{r}^T = (r_1^T, r_2^T)$ ,  $\mathbf{M}^{-1}$  为一个  $4 \times 4$  阶矩阵, 称之为“部分相干复曲率张量”, 由下式给出:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} - \frac{i}{2k}(\sigma_l^2)^{-1} - \frac{i}{k}(\sigma_g^2)^{-1} & \frac{i}{k}(\sigma_g^2)^{-1} + \mu\mathbf{J} \\ \frac{i}{k}(\sigma_g^2)^{-1} + \mu\mathbf{J}^T & -\mathbf{R}^{-1} - \frac{i}{2k}(\sigma_l^2)^{-1} - \frac{i}{k}(\sigma_g^2)^{-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

因此, 一般的部分相干复曲率张量可表示为:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{M}_{12}^{-1} \\ (\mathbf{M}_{12}^{-1})^T & (-\mathbf{M}_{11}^{-1})^* \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^{-1} & m_{12}^{-1} & m_{13}^{-1} & m_{14}^{-1} \\ m_{12}^{-1} & m_{22}^{-1} & m_{23}^{-1} & m_{24}^{-1} \\ m_{13}^{-1} & m_{23}^{-1} & m_{11}^{-1*} & m_{12}^{-1*} \\ m_{14}^{-1} & m_{24}^{-1} & m_{12}^{-1*} & m_{22}^{-1*} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\mathbf{M}^{-1}$  是转置对称矩阵。 $\mathbf{M}_{11}^{-1}$  也是转置对称的, 但  $\mathbf{M}_{12}^{-1}$  不满足转置对称性。一般情况下,  $\mathbf{M}_{11}^{-1}$  包含 6 个实数参量,  $\mathbf{M}_{12}^{-1}$  包含 4 个实数参量, 故  $\mathbf{M}^{-1}$  包含 10 个独立的实数参量。

可以证明部分相干光经过非轴对称光学系统的传输公式为<sup>[6]</sup>:

$$\Gamma(\mathbf{u}) = G_0 [\det(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{M}_1^{-1})]^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{ik}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{u}\right] \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{M}_2^{-1} = (\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{M}_1^{-1})(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{M}_1^{-1})^{-1} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  为非轴对称光学系统的分块矩阵元。(8) 式即为部分相干复曲率张量传输所满足的张量 ABCD 定律。

### 3 部分相干光的聚焦特性

在  $z = 0$  处放一像散薄透镜, 部分相干光经过薄透镜后传输的矩阵元为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{f_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{z}{f_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{z}{f_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{z}{f_y} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{f_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_y} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$f_x, f_y$  分别为薄透镜  $x$  方向,  $y$  方向的焦距, 当  $f_x = f_y$  时, 此时透镜退化为对称透镜。我们将主要讨论一维对称 GSM 光束经过对称透镜的聚焦特性。

一维 GSM 光束的交叉光谱密度中,  $\sigma_x^2, \sigma_y^2, R^{-1}, A, B, C, D$  都退化为标量,  $M^{-1}$  退化为  $2 \times 2$  阶矩阵, 扭曲因子也不存在了。利用(7)式~(10)式, 可以计算分析二维对称 GSM 的聚焦特性。我们主要分析横向相干宽度、波前曲率对聚焦特性的影响。

由(8)式可以得到 GSM 光束经过透镜后焦点位置满足如下关系:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{z_{\max}} = \frac{1}{f} \quad (11)$$

从(11)式可以看出, 轴上焦点位置和波前曲率半径是密切相关的, 当波前曲率半径较小时, 焦点位置偏离几何焦点很明显, 当波前曲率半径趋于无穷大时, 焦点位置和几何焦点位置重合。

此外计算表明, GSM 聚焦后在焦点处的光斑大小和横向相干宽度密切相关。图 1(a) 给出了焦点处不同横向相干宽度的光强分布, 为便于比较, 图 1(b) 给出了聚焦前 GSM 光束在  $z=0$  处的光强分布。计算中取  $\sigma_x = 1 \text{ mm}, \lambda = 632.8 \text{ nm}, R = 500 \text{ mm}, f = 10 \text{ mm}$ 。

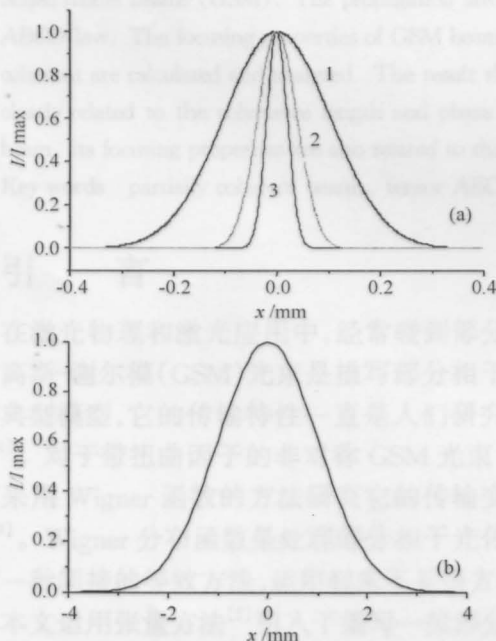


图 1 不同相干度的二维对称 GSM 在焦点处(a)和  $z=0$  处(b)的光强分布

Fig.1 Relative intensity distribution of two dimensional symmetrical GSM with different coherence degree  $\sigma_g$  at the focalpoint (a) and at  $z=0$  (b). 1:  $\sigma_g = 0.01 \text{ mm}$ ; 2:  $\sigma_g = 0.031 \text{ mm}$ ; 3:  $\sigma_g \rightarrow \infty$

$z=0$  处 GSM 的光强分布, 此时的光强分布和横向相干宽度, 波前复曲率无关。比较图 1(b) 和 (a), 对于  $z=0$  处光强分布相同的 GSM, 由于横向相干宽度不同, 焦点处光斑的大小是不同的。相干宽度越小, 即相干性越差, 焦点处的光斑越大, 相反, 相干性越好, 焦点处的光斑越小。

下面我们对焦点处光斑宽度随相干度的变化进行定量的分析。图 2 给出了焦点处光斑大小随相干度的变化关系图。

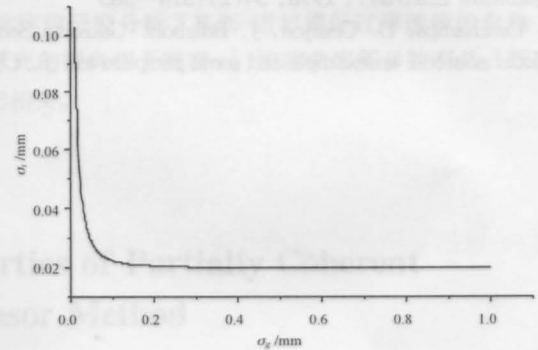


图 2 焦点处光斑大小随相干度的变化关系图

Fig.2 Distribution of beam width at the focal point along the coherence degree  $\sigma_g$

从图 2 可以看出, 相干宽度越小, 光斑半径越大, 反之, 随着相干宽度的增大, 光斑半径变小, 最后趋于恒定值。显然和图 1(a) 得出的结果是一致的。

下面再简单讨论一下三维非对称 GSM 光束的聚焦特性, 对于非对称 GSM 光束, 由于其交叉光谱密度中引入了扭曲因子, 光强分布在传输过程中会旋转, 并且旋转特性和扭曲因子密切相关。计算结果表明, 非对称 GSM 经薄透镜后, 在焦点前后, 光强分布快速旋转, 并且旋转方向和大小与扭曲因子密切相关, 当扭曲因子大于零时, 光强分布在过透镜后顺时针旋转, 小于零时, 光强分布过透镜后逆时针旋转。

## 4 结 论

本文运用张量方法引入了描写一般部分相干非轴对称 GSM 光束的  $4 \times 4$  阶部分相干复曲率张量  $M^{-1}$ , 导出了适用于部分相干光传输的张量 ABCD 定律。利用部分相干光的张量 ABCD 定律研究分析了 GSM 经过薄透镜的聚焦特性, 分析了横向相干宽度, 波前曲率等参量对聚焦特性的影响。结果表明, GSM 聚焦后在焦点处光斑的大小和横向相干宽度密切相关, 横向相干宽度越大, 焦点处光斑越小。聚焦后聚焦点位置和波前曲率半径密切相关,

波前曲率半径越小,聚焦点偏离几何焦点越远,当波前曲率趋于无穷大时,聚焦点和几何焦点重合。非对称 GSM 光束聚焦特性和扭曲因子密切相关,聚焦后,光斑在焦点前后快速旋转,旋转的方向和大小与扭曲因子密切相关。

参 考 文 献

1 C. Palma, G. Cincotti, G. Guattari. Spectral shift of a Gaussian Schell-Model beam beyond a thin lens. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1998, **34**(2):378~383  
 2 J. Deschamps, D. Courjon, J. Bulabois. Gaussian Schell-Model sources; an example and some perspectives. *J. Opt.*

*Soc. Am. A*, 1983, **73**(3):256~261  
 3 R. Simon, N. Mukunda. Twisted phase in Gaussian-beam optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(9):2373~2382  
 4 Ding Guilin, Yuan Xiao, Lu Baida. Propagation characteristic of the ten-parameter family of partially coherent general anisotropic Gaussian Schell-Model (AGSM) beams passing through first-order optical systems. *J. Mod. Opt.*, 2000, **47**(9):1483~1499  
 5 Lin Qiang, Lu Xuanhui, Wang Shaomin. ABCD law for nonsymmetric optical systems. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1988, **8**(7):658~662 (in Chinese)  
 6 Cai Yangjian, Lin Qiang. Tensor ABCD for partially coherent beam. *Acta Optica Sinica* (光学学报), accepted (in Chinese)

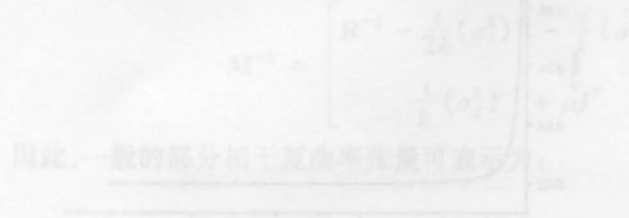


图 1 不同参数 GSM 光束在薄透镜后的强度分布

从图 1 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非对称 GSM 光束在薄透镜后的强度分布,随着扭曲因子  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。

从图 1 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。

从图 1 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。

从图 1 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。



图 2 不同参数 GSM 光束在薄透镜后的强度分布

从图 2 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。

从图 2 可以看出,当扭曲因子  $\alpha$  不同时,光束在薄透镜后的强度分布会有所不同。当  $\alpha=0$  时,光束的强度分布呈典型的 Gaussian 分布;随着  $\alpha$  的增大,光束的强度分布会出现明显的畸变,表现为在中心位置出现一个或多个次峰,且随着  $\alpha$  的进一步增大,这些次峰会逐渐向边缘移动,最终导致光束的强度分布呈现出一种类似于“花瓣”状的结构。这种现象是由于非对称 GSM 光束在传播过程中,其波前的曲率半径和扭曲因子共同作用的结果。当波前曲率半径较小时,光束的聚焦特性会发生显著变化,聚焦点会偏离几何焦点,并且光束的强度分布也会随之发生畸变。因此,在设计和应用非对称 GSM 光束时,必须充分考虑扭曲因子的影响,以确保光束的质量和聚焦特性符合预期的要求。