文章编号：0258-7025(2002)Supplement-0270-03

傍轴光系统衍射计算的柯林斯公式及其计算方法的研究*

李俊昌
（昆明理工大学理学院激光所，昆明 650093）

提要 当轴对称傍轴光学系统可以用2×2矩阵描述时，柯林斯(Collins)导出了相干光通过光学系统时与光学矩阵元素 *ABCD* 相联系的衍射场计算公式。该公式在很多情况下有效地简化了衍射计算，在激光传播的研究中获得了广泛应用。提出了三种计算柯林斯公式的方法并给出实验证明。

关键词 光束传输，光束控制，光束质量
中图分类号 TN012 **文献标识码** A

Collins Formula of Diffraction Calculation for the Near-axial Optical System and Research on Calculating Method

LI Jun-chang
(*Laser Institute, Kunming University of Science and Technology, Kunming* 650093)

Abstract For the symmetric near-axial optical system that can be described by using 2×2 matrix, Collins had derived the calculating formula of diffraction field of the coherent light passing through the optical system, which is related to element *ABCD* of optical matrix. The formula is able to simplify effectively the diffraction calculation and widely used in the research field of laser transmission. In this paper, three methods are developed to calculate Collins formula and verified by the experimental data.

Key words transmission of light beam; control of light beam; quality of light beam

1 柯林斯公式

当轴对称傍轴光学系统用矩阵元素为 *ABCD* 的2×2矩阵描述时，1970年柯林斯根据光线传播的程函理论及菲涅耳衍射近似导出了下述公式[1]：

$$U_2(x_2,y_2)=\frac{\exp(jkL)}{j\lambda B}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}U_1(x_1,y_1)\exp\left\{\frac{jk}{2B}\left[A(x_1^2+y_1^2)+D(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)\right]\right\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 \quad (1)$$

式中，L 为沿轴上的光程，$U_1(x_1,y_1)$ 为光学系统入射平面上的光波复振幅，$U_2(x_2,y_2)$ 为光波穿过光学系统后观察平面上的复振幅，$k=2\pi/\lambda$，λ 为光波长。

瑞利(Lord Rayleigh)在1896年曾提出，当相干光通过光学系统时，其衍射效应可以视为来自系统出射光瞳的衍射[2]。理论上容易证明[3]，柯林斯公式也就是将衍射问题视为光学系统出射光瞳衍射时在轴对称傍轴光学系统中的表达式。由于柯林斯公式可以一次计算出光波通过 *ABCD* 傍轴光学系统的衍射场，可以将柯林斯公式视为在傍轴轴对称光学系统中菲涅耳衍射积分的推广。

国家自然科学基金(60178004)和云南省自然科学基金(2000F0042M)资助课题。

2 柯林斯公式的计算

2.1 菲涅耳衍射调制函数法

数值分析证明[3]，菲涅耳函数 $S(x)$ 及 $C(x)$ 可以足够准确地表为

$$S(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt=\begin{cases} x\sin\{0.5567\exp[-(1.5545x-1.9941)^2]\} & x\leqslant\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1-0.049\exp[-2(x-\sqrt{2})]}{\pi x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) & x>\sqrt{2} \end{cases} \quad (2a)$$

$$C(x)=\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt=\begin{cases} x\cos(0.6855x^2) & x\leqslant 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1-0.121\exp[-2(x-1)]}{\pi x}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) & x>1 \end{cases} \quad (2b)$$

并且，当光学系统入射平面的透光孔是一个矩形孔，入射光波为平面波时，忽略柯林斯公式中积分号前的常数位相因子，观测平面上的光波场可近似表为[3]

$$U_2(x_2,y_2)=\frac{1}{A}U_1\left(\frac{x_2}{A},\frac{y_2}{A}\right)\phi_{Fx}(x_2)\phi_{Fy}(y_2)=\frac{1}{A}U_1\left(\frac{x_2}{A},\frac{y_2}{A}\right)\phi_F(x_2,y_2) \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \phi_{F_x}(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{[C(\xi_{2i}(x))-C(\xi_{1i}(x))]+j\,\mathrm{sgn}(AB)[S(\xi_{2i}(x))-S(\xi_{1i}(x))]\} \\ \phi_{F_y}(y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\{[C(\eta_{2i}(x))-C(\eta_{1i}(x))]+j\,\mathrm{sgn}(AB)[S(\eta_{2i}(x))-S(\eta_{1i}(x))]\} \end{cases} \quad (3a)$$

$$\xi_{1i}(x)=\sqrt{\frac{2}{|\lambda BA|}}[A(x_{0i}-L_{xi})-x] \quad (3b)$$

$$\xi_{2i}(x)=\sqrt{\frac{2}{|\lambda BA|}}[A(x_{0i}+L_{xi})-x] \quad (3c)$$

$$\eta_{1i}(y)=\sqrt{\frac{2}{|\lambda BA|}}[A(y_{0i}-L_{yi})-y] \quad (3d)$$

$$\eta_{2i}(y)=\sqrt{\frac{2}{|\lambda BA|}}[A(y_{0i}+L_{yi})-y] \quad (3e)$$

(x_{0i},y_{0i}) 为矩形孔中心坐标，L_{xi}，L_{yi} 分别为孔沿 x，y 坐标方向的边长，$\mathrm{sgn}(x)$ 为符号函数。

将 $\phi_F(x,y)$ 定义为菲涅耳衍射振幅调制函数，衍射光波场的分布即为照明光波场的振幅按照几何光学传播规律到达观察平面后受函数 $Q_F(x,y)$“调制”的结果。容易证明[3]，当入射波为球面波或柱面波时，仍然可以将衍射问题表为平面波通过一个等效 $ABCD$ 光学系统的衍射。由于一个任意形状的波面可以通过二次曲面近似分解为若干不同曲率的元波面，并且，一个任意透光孔可以表为若干尺寸不同的矩形孔的组合。因此，柯林斯公式可根据(3)式进行计算。

2.2 衍射传递函数法

按照线性系统理论[4]，设 f_x，f_y 为与空域坐标 x，y 对应的频域坐标，定义

$$\mathcal{H}(f_x,f_y)=\exp[jk(L-BA)]\exp\left\{jkBA\left[1-\frac{\lambda^2}{2}(f_x^2+f_y^2)\right]\right\} \quad (4)$$

为柯林斯传递函数。(1)式经整理后可得[3]

$$U_2(x_2,y_2)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\mathscr{F}\left\{\exp\left[-j\frac{k}{2B}\left(\frac{1}{A}-D\right)(x_2^2+y_2^2)\right]\frac{1}{A}U_0\left(\frac{x_2}{A},\frac{y_2}{A}\right)\right\}\mathcal{H}(f_x,f_y)\right\} \quad (5)$$

利用快速傅里叶变换(FFT)技术，不难对上式求解。

2.3 高精度快速傅里叶变换计算法

当矩阵元素 B 的数值较小或光波长较短时，为得到准确的计算结果，利用 FFT 计算(5)式时必须对函数作庞大数量的取样，对于数据容量较小的 FFT 程序形成很大困难。根据柯林斯公式的线性叠加特点，将光学系统的入射平面分解为 $M_x\times M_y$ 个相等的矩形区域，对每个区域利用取样数固定不变的傅里叶变换程序块进行计算，将结果叠加便是观测屏的衍射场[5]。设每个矩形区域的中心坐标为 (x_p,y_q)，有

$$U_2(x_2,y_2)=\frac{\exp(jkL)}{j\lambda B}\exp\left[\frac{jk}{2B}D(x_2^2+y_2^2)\right]\times\sum_{p=1}^{M_x}\sum_{q=1}^{M_y}\mathscr{F}\{U_{pq}(\xi,\eta)\} \quad (6)$$

其中，$U_{pq}(\xi,\eta)=U_1(\lambda B\xi,\lambda B\eta)\mathrm{rect}\left[\frac{M_x(\lambda B\xi-x_p)}{2L_x}\right]\mathrm{rect}\left[\frac{M_y(\lambda B\eta-y_q)}{2L_y}\right]\exp[i\lambda BA\pi(\xi^2+\eta^2)]$ (7)

增加分解区域的数目，等价于缩短取样间隔或在同一区域扩大取样数。于是，可以利用数据容量固定的 FFT 程序完成任意给定精度或任意取样间隔的衍射计算。

3 数值计算及实验证明

图 1 为实验装置示意图，图中 x_1y_1 为光阑平面，光阑由直径为 1 mm 金属丝相互垂直地焊接在具有半径为 $r=30$ mm 圆孔的金属屏上构成；波面半径 $R\approx5000$ mm，功率 500 W，半径 7.2 mm，波长 $\lambda=10.6\ \mu$m 的 CO_2 准基模高斯激光束沿系统对称轴射到光阑上；在光阑后距离 d_0 处是一半径 20 mm，焦距 $f=95.25$ mm 的薄透镜。我们让采样时间始终固定为 15 ms，通过平移光阑改变 d_0，在测试屏上用热敏纸采样探测在光阑后有透镜及无透镜的两种衍射图象。图 2 给出部份采样结果。

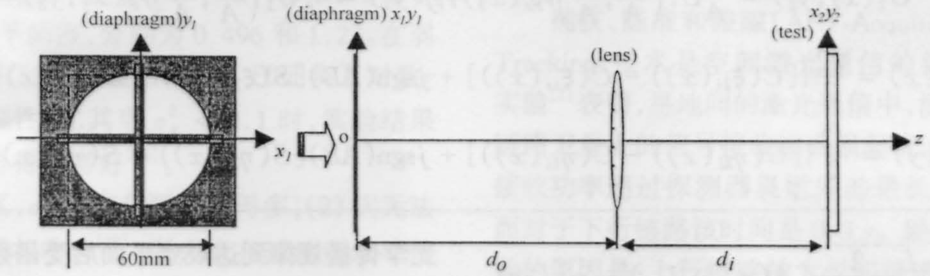

图 1 激光通过十字叉光阑的衍射实验示意图

Fig.1 The scheme of diffraction experiment in which laser passes through a cross diaphragm

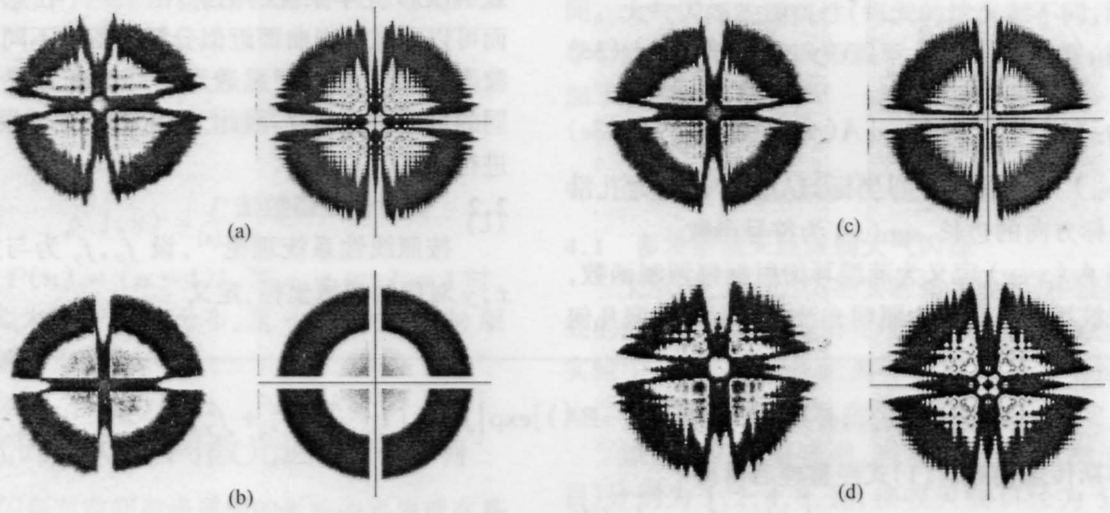

图 2 衍射光斑热敏纸采样光斑及理论模拟

Fig.2 The diffraction spot measured by thermal paper and the theoretical simulation

(a) $d_0=87$ mm; (b) $d_0=190.5$ mm; (c) $d_0=238$ mm; (d) $d_0=381$ mm.

$f=95.25$ mm, $P=500$ W, $t=15$ ms, $d_i=190.5$ mm, (20 mm×20 mm)

利用热敏纸的“能量—灰度”特性[3]及计算结果模拟的光斑与实验比较示于图 2。实际计算表明，以上三种计算方法均能得到满意的计策结果，但使用非涅耳衍射调制函数通常可以较大幅度地节约计算时间。

参 考 文 献

1 S. A. Collins. Laser-system diffraction integral written in terms of matrioptics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**:1168

2 J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1968

3 Li Junchang. *Laser Diffraction and Heat Effect Calculation*. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese)

4 J. W. Cooley, J. W. Tukey. Analgorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Comptation*, 1965, **19**(90):297～301

5 Li Junchang. The accurate calculation of Fresnel diffraction and Collins′ formula by using the fast Fourier transform. *J. Optoelectronics Laser*, 2001, **12**(5):529