

文章编号: 0258-7025(2002)Supplement-0248-03

# 复合 1/4 波片的等效理论

周 军<sup>1,2</sup> 楼祺洪<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院上海光机所, 上海 201800 )  
(<sup>2</sup> 常熟高等专科学校物理系, 常熟 215500 )

**提要** 基于偏振光矢量的琼斯矩阵理论,对复合 1/4 波片的工作特性进行了分析,表明其对偏振态的变换作用可等效于一旋光器和一单 1/4 波片的组合。借助于么正矩阵的性质,推导出了复合 1/4 波片中等效旋光器旋转角和等效单 1/4 波片快轴取向角的表达式。

**关键词** 复合波片, 琼斯矩阵, 旋光器, 么正矩阵

**中图分类号** O436.3 **文献标识码** A

## Equivalent Theory of the Composite Quarter-Wave Plate

ZHOU Jun<sup>1,2</sup> LOU Qi-hong<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academia Sinica, Shanghai 201800 )  
(<sup>2</sup> Department of physics, Changshu College, Changshu 215500 )

**Abstract** The characteristics of composite quarter-wave plate were analyzed based on the Jones matrix theory in this paper. It is found that a composite quarter-wave plate and an assemblage of a rotator and a quarter-wave plate were equivalent. The rotation angle of equivalent rotator and azimuth angle of equivalent single quarter-wave plate were derived.

**Key words** composite plate, Jones matrix, rotator, unitary matrix

### 1 引 言

1/4 波片(QWP)和 1/2 波片(HWP)是激光技术中用于激光偏振态变换的核心关键器件。通常人们使用的 1/4 波片和 1/2 波片大部分是由云母劈裂而成的,但是要把云母劈裂成具有严格正确的厚度是比较困难的。因而在云母波片制作过程中造成了较大的资源浪费。为了充分利用劈裂出的任意延迟量的波片,人们对满足一定条件的两任意延迟量的波片所组成的复合波片系统进行了研究,发现当两波片快轴之间的夹角为某一特定值时,就可代替通常的 1/4 波片实现线偏振光和圆偏振光之间的相互转换,这种组合通常称作复合(或可调)1/4 波片<sup>[1,2]</sup>。

通过研究单 1/4 波片和复合 1/4 波片对线偏光的变换规律,我们发现复合 1/4 波片同单 1/4 波片对线偏光的变换规律基本一致,但有一旋转角存在,据此提出了复合 1/4 波片等效的观点。由于波片和旋光器的琼斯矩阵都是么正矩阵,利用么正矩阵的性质,推导出了复合 1/4 波片中等效旋光器旋转角和等效单 1/4 波片快轴取向角的表达式。这就为复

合 1/4 波片的推广应用以及其对偏振态变换的分析带来极大帮助,并给出了处理此类问题的一般方法。借助于我们的等效理论,采用不同材料的两任意延迟量的波片,可设计出全新消色差复合 1/4 波片。

### 2 复合 1/4 波片对偏振态的变换

对于两任意延迟量为  $\delta_1, \delta_2$  的波片组合系统,其快轴之间夹角为  $\theta$ ,当满足条件

$$\cos 2\theta = \cot \delta_1 \cot \delta_2 \quad 90^\circ \leq \delta_1 + \delta_2 \leq 270^\circ \quad (1)$$

时,就构成了复合 1/4 波片,可以实现线偏振光和圆偏振光之间的相互变换<sup>[1,2]</sup>。

让一振动方向与  $x$  轴夹角为  $\gamma$  的线偏振光入射该复合 1/4 波片系统,依据琼斯矩阵理论入射偏振光矢量为

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}, \text{ 出射一般为椭圆偏振光, 设为}$$

$c \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix}$ , 则有如下关系成立

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中  $c, \chi$  都为复数,  $A$  为复合 1/4 波片的琼斯矩阵

$$A = R(-\theta)M_2(0, \delta_2)R(\theta)M_1(0, \delta_1) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta e^{-i\delta_2} & \cos\theta\sin\theta[e^{-i\delta_1} - e^{-i(\delta_1+\delta_2)}] \\ \cos\theta\sin\theta(1 - e^{-i\delta_2}) & \cos^2\theta e^{-i(\delta_1+\delta_2)} + \sin^2\theta e^{-i\delta_1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

出射  $c \begin{bmatrix} 1 \\ \chi \end{bmatrix}$  所对应偏振椭圆的椭率角  $\epsilon$  ( $-\pi/4 \leq \epsilon \leq \pi/4$ ) 由(4)式决定<sup>[3]</sup>

$$\sin 2\epsilon = \frac{2\text{Im}(\chi)}{1 + |\chi|} \quad (4)$$

根据(2)式, (4)式, 就可以计算出入射光振动方向为  $\gamma$  时, 从复合 1/4 波片出射偏振光的椭率角。

为将复合 1/4 波片的工作特性同单 1/4 波片相比较, 首先考虑线偏振光入射到单 1/4 波片 ( $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ, \theta = 0^\circ$ ) 的情况后出射偏振光的偏振椭圆形状  $|\tan \epsilon|$  同入射线偏光振动方向  $\gamma$  的关系, 见图 1 中实线所示。

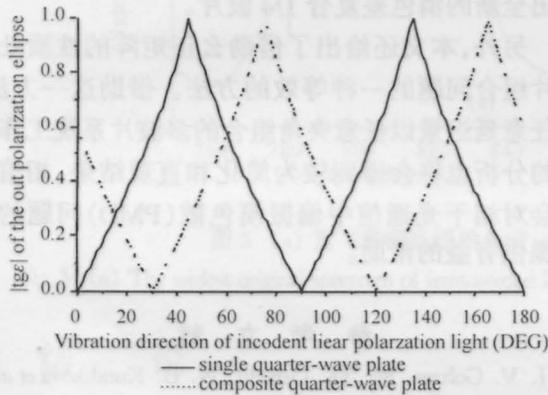


图 1 出射偏振态的  $|\tan \epsilon|$  同入射线偏光振动方向  $\gamma$  的关系曲线

Fig. 1 Relationship between  $|\tan \epsilon|$  of the out polarization ellipse and vibration direction  $\gamma$  of the incident linear polarization light

可以看出, 当  $\gamma = 0^\circ, 90^\circ$  时,  $|\tan \epsilon| = 0$ , 即出射光为线偏光; 当  $\gamma = 45^\circ, 135^\circ$  时,  $|\tan \epsilon| = 1$ , 出射光为圆偏振光, 这正是我们所熟知的单 1/4 波片的工作特性。

对于  $\delta_1 = \delta_2 = 62.6^\circ$  的复合 1/4 波片, 夹角  $\theta = 37.2^\circ$ , 同样可以得  $|\tan \epsilon|$  与  $\gamma$  的关系曲线, 见图 1 中虚线所示。可以看出, 当  $\gamma = 29.4^\circ, 119.4^\circ$  时,  $|\tan \epsilon| = 0$ , 出射光为线偏光; 当  $\gamma = 74.4^\circ, 164.4^\circ$  时,  $|\tan \epsilon| = 1$ , 出射光为圆偏光。出射为线和圆偏光时对应的入射线偏光的振动方向  $\gamma$  差为  $45^\circ$ , 这一点和单波片的工作特性完全相同。若将图 1 中的虚线向左平移  $29.4^\circ$ , 则两线完全重合, 这说明该复合 1/4 波片同单 1/4 波片对线偏光的变换规律一致, 但有一旋转角存在。据此, 我们提出复合 1/4 波片在工作特性上等效于一旋光器和单 1/4 波片的组合。

线偏光入射到该复合 1/4 波片系统, 先旋转一定的角度, 然后入射到等效单 1/4 波片。当  $\gamma = 29.4^\circ$  时, 出射为线偏光, 说明旋转后的方向正好为等效单 1/4 波片的快轴方向。据此可得等效单 1/4 波片的快轴方向与  $x$  轴的夹角为  $\beta = 7.8^\circ$ , 等效旋光器的旋转角  $\alpha$  为  $29.4^\circ - 7.8^\circ = 21.6^\circ$ 。当然也可将该复合 1/4 波片等效为一单 1/4 波片和一旋光器的组合, 此时等效单 1/4 波片的快轴方向为  $29.4^\circ$ , 等效旋光器的旋转角为  $21.6^\circ$ 。

### 3 复合 1/4 波片的等效理论

#### 3.1 等效为旋光器和单 1/4 波片组合

若将复合 1/4 波片的工作情况等效为偏振光先通过一旋光器, 然后再通过单 1/4 波片。设等效旋光器的旋转角为  $\alpha$ , 等效单 1/4 波片的快轴方向与参考方向夹角为  $\beta$ , 则该等效系统的琼斯矩阵  $B$  为

$$B = R(-\beta)M\left(0, \frac{\pi}{2}\right)R(\beta)R(\alpha) = R(-\beta)M\left(0, \frac{\pi}{2}\right)R(\alpha + \beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \sin\beta\sin(\alpha + \beta)\exp(-i\pi/2) & \cos\beta\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos(\alpha + \beta)\exp(-i\pi/2) \\ \sin\beta\cos(\alpha + \beta) - \cos\beta\sin(\alpha + \beta)\exp(-i\pi/2) & \sin\beta\sin(\alpha + \beta) + \cos\beta\cos(\alpha + \beta)\exp(-i\pi/2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

为表示方便, 我们将矩阵  $A$  和  $B$  分别设为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

根据前述的复合 1/4 波片的等效分析, 可知  $A, B$  对偏振态的变换作用是完全一样的, 则可知  $A$  和  $B$  两矩阵相似, 相差一个复常数  $\lambda$

$$A = \lambda B \quad (8)$$

又由于旋转矩阵、波片的琼斯矩阵都为么正矩阵, 所以可知琼斯矩阵  $A, B$  也是么正的。而么正矩阵的转置共轭等于其逆矩阵<sup>[4]</sup>, 即

$$A^+ = A^{-1}, \quad B^+ = B^{-1} \quad (9)$$

在(8)式的两边左乘  $B^+$ , 得

$$B^+ A = B^+ B \lambda = B^{-1} B \lambda = I \lambda \quad (10)$$

其中  $I$  为  $2 \times 2$  单位矩阵。从而可知, 新矩阵

$$B^+ A = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{21}^* \\ B_{12}^* & B_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}^* + A_{21}B_{21}^* & A_{12}B_{11}^* + A_{22}B_{21}^* \\ A_{11}B_{12}^* + A_{21}B_{22}^* & A_{12}B_{12}^* + A_{22}B_{22}^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

为对角化的矩阵,则非对角线元素必定为0,也即

$$A_{11}B_{12}^* + A_{21}B_{22}^* = 0, \quad A_{12}B_{11}^* + A_{22}B_{21}^* = 0 \quad (12)$$

将(3)式,(5)式代入计算可得(12)式中第一式的实部为

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\delta_2)\cos\beta\sin(\alpha + \beta) - \sin^2\theta\sin\delta_2\sin\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos\theta\sin\theta(1 - \cos\delta_2)\sin\beta\sin(\alpha + \beta) - \cos\theta\sin\theta\sin\delta_2\cos\beta\cos(\alpha + \beta) = 0 \quad (13)$$

虚部为

$$-(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\delta_2)\sin\beta\cos(\alpha + \beta) - \sin^2\theta\sin\delta_2\cos\beta\sin(\alpha + \beta) + \cos\theta\sin\theta(1 - \cos\delta_2)\cos\beta\cos(\alpha + \beta) + \cos\theta\sin\theta\sin\delta_2\sin\beta\sin(\alpha + \beta) = 0 \quad (14)$$

通过对(13),(14)两式求解,可得

$$\beta = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\sin 4\theta(1 - \cos\delta_2)}{1 + \sin^2 2\theta(\cos\delta_2 - 1)} \right] \quad (15)$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \arcsin(\sin 2\theta \sin\delta_2) \quad (16)$$

对于延迟量为  $\delta_1, \delta_2$  的复合 1/4 波片系统,当入射线偏光的振动方向  $\gamma = \alpha + \beta$  时,从复合波片出射的依然为线偏光,但旋转了  $\alpha$  角度。当  $\gamma = \alpha + \beta + 45^\circ$  时出射就为圆偏光,可以代替单 1/4 波片实现偏振光的变换功能。

### 3.2 等效为单 1/4 波片和旋光器的组合

同样我们也可将复合 1/4 波片的工作情况等效为偏振光先通过一单 1/4 波片,然后再通过旋光器。各个量的表示同前,通过类似于 3.1 的推导过程可得

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin(\sin 2\theta \sin\delta_2) \quad (17)$$

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\sin 4\theta(-1 + \cos\delta_2)/2}{1 + \sin^2 2\theta(\cos\delta_2 - 1)} \right] \quad (18)$$

## 4 结论与讨论

通过研究单 1/4 波片和复合 1/4 波片对线偏光

的变换规律,提出复合 1/4 波片等效的观点。并推导出复合 1/4 波片中等效旋光器旋转角和等效单 1/4 波片快轴取向角的表达式,这对复合波片的实际应用以及它对偏振态变换的分析带来极大的帮助。采用不同材料的两任意延迟量的波片,可望设计出全新的消色差复合 1/4 波片。

另外,本文还给出了借助么正矩阵的性质处理波片组合问题的一种等效的方法。借助这一方法,对任意延迟量以任意夹角组合的多波片系统工作特性的分析也将会得到较为简化和直观结果,相信这将会对相干光通信中偏振模色散(PMD)问题的解决提供有益的帮助。

### 参 考 文 献

- 1 I. V. Goltser, M. Ya. Darscht, N. D. Kundikova *et al.*. An adjustable quarter-wave plate. *Opt. Commun.*, 1993, 97(5,6):291
- 2 李国华,苏美开,宋连科. 复合延迟片研究. 曲阜师范大学学报(自然科学版),1990,16(3):54
- 3 周 军,程柱建,苏桂英. 复合 1/4 波片工作特性的综合分析. 光电子·激光,2001,12(4):368
- 4 魏光辉等. 矩阵光学. 北京:兵器工业出版社,1995. 156~177