文章编号：0258-7025(2002)Supplement-0203-03

新型离子波纹摆动器自由电子激光

姜孟瑞[1] 张 磊[2]
([1]聊城师范学院物理系，聊城 252059
[2]山东师范大学物理系，济南 250014)

提要 在离子波纹摆动器中，提出改变电子束的入射方向，这种方法保证了离子波纹场的纵向分量为零，从而消除了纵向电场对离子波纹摆动器的影响。在小振幅条件下，给出了摆动器的工作方程，导出了电子束的运动轨迹、自发辐射谱分布及该摆动器的小信号增益。

关键词 离子波纹，自发辐射谱，小信号增益，自由电子激光

中图分类号 TN248.6 **文献标识码** A

Novel Ion Ripple Wiggler for a Free-electron Laser

JIANG Meng-rui[1] ZHANG Lei[2]
([1] Department of Physics, Liaocheng Teachers University, Liaocheng 252059
[2] Department of Physics, Sandong Normal University, Jinan 250014)

Abstract In ion-ripple wiggler, with changing the direction of the injected electron beam, the longitudinal component of the ion-ripple electric field equals to zero, thereby, the harmful influence of longitudinal electric field of an ion-ripple wiggler can be eliminated. Under the condition of small amplitude, the operating equations of the wiggler are given, and then, the trajectories of the beam electrons, the angular spectrum of spontaneous emission and small signal gain are derived.

Key words ion-ripple, spectrum of spontaneous emission, small signal gain, free-electron laser

1 引 言

"短波长自由电子激光"和"自由电子激光的小型化"都是自由电子激光研究领域的热点之一。由自由电子激光的共振关系式

$$\lambda = \lambda_w(1 + a_w^2)/2\gamma^2$$

可知，改进摆动器设计方案，缩短泵浦场的空间周期，不仅有利于实现"短波长"，还有利于"小型化"，在这方面人们提出了许多新的设计思想[1~3]。但这些方案在缩短空间周期的同时，削弱了摆动器场强，从而降低了增益。所以，自由电子激光研究领域正在寻找既具有短周期空间结构，又具有强场的摆动器。例如等离子体尾波摆动器[4]和离子波纹摆动器[5]。

等离子体尾波摆动器是利用等离子体电子的扰动产生电场。由于电子质量很小，易受到入射电子束的影响，因而摆动器场不稳定；离子波纹摆动器是利用等离子体中离子的密度波纹产生电场，因而稳定性较好。然而，这一方案中，离子波纹场的纵向分量对离子波纹激光(IRL)的工作状况具有较大影响[6]，即使满足条件 $k_w \gg \omega_{pe}/\gamma^{3/2}$，IRL 的效率对互作用长度的敏感性仍不能消除，而且效率下降很多。为了解决这一问题，在离子波纹激光器的基础上，改变电子束的入射方向，并且作某种限制，从而使纵向电场分量为零。按照这样的模型，采用单粒子理论计算了相对论性电子在小振幅条件下的运动，再根据麦迪(Madey)定理计算出了相对论性电子的自发辐射谱和小信号增益，并由此得出一些重要结论。

2 新型离子波纹摆动器的工作原理

设等离子体中已存在沿 X 方向传播的平面波(声波或离子声波)，则等离子体密度呈波纹状变化，离子的密度可表示为

$$n = n_0[1 + \sigma\cos(\omega_c t - k_c x)]$$

式中 n_0 为离子的平均密度，σ 为调制深度，ω_c 和 k_c

为声波(或离子声波)的角频率和波数。

由于相对论电子束的电子速度接近光速,可认为等离子体密度波纹是"静止的"。所以忽略时间因子,得

$$n = n_0(1+\sigma\cos k_c x) = n_0 + n_0\sigma\cos k_c x \quad (1)$$

式中第一项表示均匀的离子背景,只要等离子体区域足够大,背景电场可不予考虑。由此可得离子波纹场的场强为

$$\boldsymbol{E}_w = (2\pi n_0 e/k_c)\sigma\sin(k_c x)\boldsymbol{e}_x \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{e}_x$ 为 X 方向的单位矢量。

令相对论性电子从坐标原点附近$(x_0,0,0)$点以速度 v_0 平行于 Z 轴射入场中,则电子在电场力 $\boldsymbol{F}_w = -e\boldsymbol{E}_w$ 的作用下,在 $y=0$ 平面内完成横向摆动,此时,纵向电场分量为零,因而也就不存在纵向电场分量的不利影响。由场的结构可以看出,x_0 即为电子摆动的最大振幅。

为简单计,我们设 x_0 很小,满足 $\sin k_c x \approx k_c x$,此时电场可写成

$$\boldsymbol{E}_w = 4\pi n_0 e\sigma x\boldsymbol{e}_x \quad (3)$$

电子的工作方程为:

$$\begin{cases} mv_x\left(\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) + m\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right) = -4\pi n_0 e^2\sigma x \\ mv_z\left(\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) + m\gamma\left(\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\left(\dfrac{4\pi n_0 e^2\sigma}{mc^2}\right)xv_x \end{cases} \quad (4)$$

注意到 $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \ll c$ 及初始条件:

$$x|_{t=0} = x_0,\quad v_x|_{t=0} = 0,$$

$$z|_{t=0} = 0,\quad v_z|_{t=0} = v_0,$$

方程组(4)的解为:

$$\begin{cases} x = x_0\cos\omega_0 t \\ v_x = -\omega_0 x_0\sin\omega_0 t \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} v_z = v_{/\!/} + [\omega_0^2 x_0^2\cos(2\omega_0 t)/4c^2]v_{/\!/} \\ z = v_{/\!/}t + \omega_0 x_0^2 v_{/\!/}\sin(2\omega_0 t)/8c^2 \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$\omega_0 = (4\pi n_0 e^2\sigma/m\gamma)^{1/2} = \omega_{pe}(\omega/\gamma)^{1/2},$$

ω_{pe} 为电子等离子体频率。$v_{/\!/}$ 为纵向平均速度,

$$v_{/\!/} = v_0(1-\omega_0^2 x_0^2/4c^2)$$

不难求出基波频率

$$\omega_r = 2\omega_{pe}\sigma^{1/2}\gamma^{3/2} \quad (7)$$

将(5)、(6)式与传统自由电子激光器线性摆动器中的电子轨迹和速度进行对比,我们可以发现,它们实质上是一样的,只是参数 ω_0 和 a_w 的表达式不同而已。

3 自发辐射谱及小信号增益

设辐射电磁波电场为

$$\boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{E}_0\cos(\omega_s t - k_s\boldsymbol{nr} + \varphi)$$

式中 ω_s 和 k_s 分别为辐射电磁波的角频率和波数,φ 为初相位,$|\boldsymbol{E}_0|$ 则为电场幅值。电子与电磁波的作用方程为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{e}{mc^2}\right)\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}_s \quad (8)$$

假设观察方向在 X-Z 平面内[即:$\boldsymbol{n} = (\sin\theta,0,\cos\theta)$],辐射场的极化方向与 X-Z 面的夹角为 α,则在光场不太强的情况下,只考虑一阶微扰,上式变为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{e}{mc^2}\right)\boldsymbol{v}^{(0)}\boldsymbol{E}_s = -\left(\frac{e}{mc^2}\right)(v_x\cos\theta - v_z\sin\theta)E_0\cos(\omega_s t - k_s\boldsymbol{nr} + \varphi)\cos\alpha \quad (9)$$

$$\omega_s t - k_s\boldsymbol{nr} = (\omega_s/\omega_r)[\omega_0 t - p\cos(\omega_0 t) - q\sin(2\omega_0 t)] \quad (10)$$

(9)式中 γ_1 为 γ 的一阶微扰量,$\boldsymbol{v}^{(0)}$ 为电子未受微扰时的速度,即只考虑泵浦场时的速度。(10)式中

$$p = \omega_0 x_0\sin\theta/c(1-\beta_{/\!/}\cos\theta),\qquad q = \omega_0^2 x_0^2\beta_{/\!/}\cos\theta/8c^2(1-\beta_{/\!/}\cos\theta) \quad (11)$$

而 $\beta_{/\!/} = v_{/\!/}/c$,将(5)式、(6)式代入(9)式得

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{mc^2}\left[\omega_0 x_0\sin\omega_0 t\cos\theta + v_{/\!/}\sin\theta + \frac{\omega_0^2 x_0^2 v_{/\!/}\sin\theta\cos(2\omega_0 t)}{4c^2}\right]E_0\cos(\omega_s t - k_s\boldsymbol{nr} + \varphi)\cos\alpha \quad (12)$$

设 $\omega_s = N\omega_r + \delta\omega$,(其中 N 为谐波次数,$\delta\omega$ 为失谐量),将(10)式代入(12)式,积分后平方,再对 φ 取平均,得

$$\langle\gamma_1^2\rangle = 2\left(\frac{\pi eN_0E_0\cos\alpha}{mc^2\omega_0}\right)^2\left(\frac{\sin U}{U}\right)^2 Q^2(N) \quad (13)$$

式中 N_0 为电子摆动的周期数,$U = \pi N_0\delta\omega/\omega_r$ 为相位总滑移量的一半。当 N 为奇数时

$$Q(N)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{2}\omega_0 x_0 J_{2k}(Np)\left[J_{\frac{N+1}{2}+k}(Nq)-J_{\frac{N-1}{2}+k}(Nq)\right]+v_{/\!/}\ \theta J_{2k+1}(Np)J_{\frac{N+1}{2}+k}(Nq)\right\}$$

当 N 为偶数时

$$Q(N)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left\{\frac{1}{2}\omega_0 x_0 J_{2k+1}(Np)\left[J_{\frac{N}{2}+k}(Nq)-J_{\frac{N}{2}+k+1}(Nq)\right]+v_{/\!/}\ \theta J_{2k}(Np)J_{\frac{N}{2}+k}(Nq)\right\}$$

式中 J 表示贝塞尔函数。根据 Madey 定理，自发辐射谱分布为

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}=\left(\frac{\pi e^2 N_0^2\omega_s^2}{\omega_0^2 c}\right)\cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2 U}{U^2}\right)Q^2(N) \tag{14}$$

将(7)、(13)式应用于 Madey 定理，得束电子相对论能量的二阶微扰平均值为

$$\langle\gamma_2\rangle=-\frac{3}{4}\left(\frac{L}{2v_{/\!/}\gamma}\right)^3\left(\frac{eE_0}{mc^2}\right)^2\omega_s\cos^2\alpha Q^2(N)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left(\frac{\sin^2 U}{U^2}\right) \tag{15}$$

式中 L 为摆动器长度。根据能量守恒定律，辐射能的增量等于电子动能增量的负值。设相对论电子束的束流强度为 I，则小信号增益为

$$G=-\frac{\langle\gamma_2\rangle mc^2(I/e)t}{(\varepsilon_0/2)E_0^2 cAt}=\frac{3Ie}{16\varepsilon_0 mc^3 A}\left(\frac{L}{v_{/\!/}\gamma}\right)^3\omega_s\cos^2\alpha Q^2(N)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\left(\frac{\sin^2 U}{U^2}\right) \tag{16}$$

式中 A 为光波的横截面积。

4 结果讨论

1）自发辐射谱分布表达式中的重要因子 $(\sin U/U)^2$，与自由电子激光增益有直接联系，它把相对论性运动电子的受激辐射与自发辐射联系起来，说明利用这种摆动器产生自由电子激光是可能的。

2）当 $\theta=0$ 时，由(11)知，$p=0$，$q=\omega_0^2x_0^2\beta_{/\!/}/8c^2(1-\beta_{/\!/})$。对于奇次谐波 $Q(N)=(\omega_0x_0/2)\left[J_{\frac{N+1}{2}}(Nq)-J_{\frac{N-1}{2}}(Nq)\right]$，对于偶次谐波 $Q(N)=0$。即在轴线上观察，只存在奇次谐波，只有偏离轴线时，偶次谐波才出现。

3）谱分布及增益与电子的初始状态有关，即取决于电子的注入条件。

4）自发辐射谱及小信号增益中含有极化因子，$\cos^2\alpha$ 说明与极化方向有关，当 $\alpha=\pi/2$ 时，$\mathrm{d}^2I/\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega=0$，$G=0$。这说明不存在极化方向平行于 Y-Z 平面的极化波。

5）与束流强度成正比，所以要得到较高的增益，必须保证一定的束流强度。

6）由 G 的表达式可知，要得到正的增益，必须使 U 值在 $-\pi$ 到 0 之间。

参 考 文 献

1 L. R. Elias, W. M. Fairbank, J. M. J. Madey *et al*.. Observation of Stimulated Emission of Radiation by Relativistic Electrons in a Spatially Periodic Transverse Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett*., 1976, **36**(13):717～720

2 D. A. Jaroszynski, R. Prazeres, F. Glotin *et al*.. Free-Electron Laser Efficiency Enhancement, Gain Enhancement, and Spectral Control Using Step-Tapered Undulator. *Phys. Rev. Lett*., 1995, **74**(12):2224～2227

3 Peng Liangfu, Yang Zhonghai, Liu Shenggang. Research of harmonic property in a two-dimensional undulator free-electron Laser. *Chinese J. Lasers*(中国激光), 1993, **A20**(5):330～334(in Chinese)

4 Liu Shengguang, Jiang Mengrui, Zhu Jiaqing. Free Electron Laser from Plasma Wake-field Wiggler. *J. Optoelectronics · Laser*(光电子 · 激光), 2000, **11**(1):69～71(in Chinese)

5 K. R. Chen, J. M. Dawson. Ion-ripple laser. *Phys. Rev. Lett*., 1992, **68**(1):29～32

6 Liu Pukun, Xiong Caidong. Influence of Longitudinal Component of the Ion-ripple Electric Field on Ion-ripple Laser. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(2):143～146 (in Chinese)