文章编号：0258-7025(2002)Supplement-0044-03

光腔模式的数值矩阵方法

程愿应　胡　进　李家熔

（华中科技大学激光研究院，武汉 430074）

提要　对腔镜有限分划，基于衍射积分理论构造光腔的传输数值矩阵，并对其进行特征值和特征向量求解，从而实现光腔模式计算。计算了非虚共焦非稳腔内的光场特性和远场光斑分布，并与实际结果吻合。

关键词　矩阵特征值，数值积分，谐振腔

中图分类号 TN248　　**文献标识码** A

Numerical Matrix Method of Mode for Optical Resonators

CHENG Yuan-ying　HU Jin　LI Jia-rong

(*Institute of Laser, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan* 430074)

Abstract　The transfer matrix of an optical resonator is obtained based on Frensnel-Kirchhoff diffracted integral equation by dividing the mirror into finite grids. The eigenvalue calculation and iteration of the transfer matrix will lead to the mode and far-field beam characterization of the resonator. An example is illustrated: confocal unstable resonator.

Key words　eigenvalue of matrix, numerical integral, resonator

1　方法的提出和数值矩阵的构造

设谐振腔腔长为 L。将腔镜Ⅰ按照一定的顺序划分为单元 $1\sim S$，于是，腔镜Ⅰ上的复振幅分布函数 $U_1(x,y)$ 可被离散化为复振幅分布向量 U_1

$$U_1=\{U_1[1],U_1[2],\cdots U_1[S]\}$$

同理，镜Ⅱ上的复振幅分布可用矩阵 U_2 描述。若已知 U_1，则经过腔内的一次渡越，可求出 U_2。对 U_2 的某一元素 n，其中心位置 $[X_n,Y_n]$ 由腔形和单元划分确定，其复振幅 $U_2[n]$ 可认为是腔镜Ⅰ上单元 $1\sim S$ 作用并叠加的结果，根据菲涅耳-基尔霍夫衍射公式，考察镜Ⅰ上第 m 个单元 $U_1[m]$（中心位置 $[X_m,Y_m]$）对 $U_2[n]$ 的作用，记为

$$U_{12}[m,n]=\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\iint_{S_m}U_1[m]\frac{\mathrm{e}^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\alpha)ds \quad (1)$$

S_m 表示 $U_1[1]$ 对应的镜Ⅰ上第 m 个的面积单元。当划分数 S 足够大时，可认为每个单元上复振幅起伏不大，即可用 S_m 中心处的复振幅来代替，可认为 S_m 上复振幅均匀分布，即与 $\mathrm{d}s$ 的积分变量 x、y（以直角坐标为例）无关，将其从式(1)的积分号内提出得

$$\left.\begin{aligned}&U_{12}[m,n]=U_1[m]\times A_{12}[m,n],\\&A_{12}[m,n]=\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\iint_{S_m}\frac{\mathrm{e}^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\alpha)\mathrm{d}s,\\&\rho=\sqrt{(X_m-X_n)^2+(Y_m-Y_n)^2+L^2}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$A_{12}[m,n]$ 可理解为权，在腔形一定且划分一定时，$A_{12}[m,n]$ 中的 ρ 和 $\cos\alpha$ 只与单元 $U_1[m]$、$U_2[n]$ 的相对几何位置有关，一对 m、n 唯一确定一个 $A_{12}[m,n]$。m 取值 $1\sim S$，叠加可得

$$U_2[n]=\{A_{12}[1,n]\ A_{12}[2,n]\cdots A_{12}[s,n]\}\{U_1[1]\ U_1[2]\cdots U_1[s]\}^T.$$

腔内光场的一次渡越可由以下矩阵形式表

$$\begin{bmatrix}U_2[1]\\U_2[2]\\\cdots\\U_2[S]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{12}[1,1]&A_{12}[1,2]&\cdots&A_{12}[1,S]\\A_{12}[2,1]&A_{12}[2,2]&\cdots&A_{12}[2,S]\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{12}[S,1]&A_{12}[S,2]&\cdots&A_{12}[S,S]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1[1]\\U_1[2]\\\cdots\\U_1[S]\end{bmatrix} \quad (3)$$

可简记为：$U_2 = A_{12} \times U_1$，$A_{12}[m, n]$ 的物理意义为：腔镜 Ⅰ 上单元 m 上输入复振幅为 1 时，对腔镜 Ⅱ 上单元 n 的作用。同理可得 A_{21}，它描述从镜 Ⅱ 返回到镜 Ⅰ。则腔内一次往返可表示为

$$U'_1 = A_{21} \times A_{12} \times U_1 = A \times U_1$$

根据光腔的自适应原理，当腔内的光波场逐渐稳定时，有 $U'_1 = \gamma \times U_1$，γ 为表示振幅衰减和相位波动的复常数因子，由两式可得，$\gamma \times U_1 = A \times U_1$，稳定光波场的本征值 γ 是 A 的特征根，而光场分布(由向量 U_1 表示)是 γ 对应的特征向量，可见求解传输矩阵 A 对腔内模式和光束特性计算具有提纲挈领的作用。而且可以看出该法的优点：1) 无须多次迭代，可直接求得腔内稳定场的分布；2) 求出本征值 γ，可方便计算单程相移和单程损耗；3) 可求解腔内多个可能起振的模式(S 个)，并可知，绝对值较大且幅角较小的特征值对应主要模式，一般为低阶模，即迭代法的结果；4) 不必对式(1)中的 ρ 采用远场近似[1,2]，适于计算短腔。

由(3)式知 A_{12} 的第 m 行表示镜 Ⅰ 上单元 m(复振幅为 1)对腔镜 Ⅱ 上单元 $1 \sim S$ 的作用，典型分布类似于圆孔的夫琅和费衍射的 sinc 函数，如图 1 所示(取 $N = 200$)。腔镜上的光场的强度和相位的分布十分光滑，且无大的跳变，完全可以通过插值减少计算量。结果证明只要样点的数目不太少，可将计算量减半，且误差很小。图中方块是数值积分的结果，十字形是对其插值的结果。

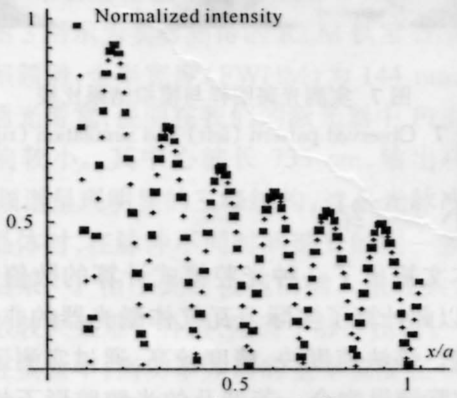

图 1　矩阵 A_{12} 的插值

Fig. 1　Interpolation of the matrix A_{12}

2　光束质量计算

数值矩阵方法描述的是光场在谐振腔内的来回渡越，自然也可以计算光场的传播。下面将借此计算稳腔基模的发散角。根据发散角(全角)定义

$$\theta = \lim_{z \to \infty} \frac{2\omega(z)}{z} = 2\frac{\omega_0}{f}$$

我们希望求解 $z = 0$ 处的光场分布，以计算腰斑尺寸 ω_0，从而求解 θ。在已经求得腔镜表面基模的分布前提下，可通过数值矩阵方法，计算从腔镜 Ⅰ 到束腰位置平面的传播，考虑镜 Ⅰ 上 N 个单元(这里单元取环形)对束腰平面上 N 个单元的作用，可求得从镜 Ⅰ 到该平面镜的传输矩阵，与腔镜 Ⅰ 上的光场分布向量(基模)做乘法可得束腰平面的光场分布，如图 2 所示。

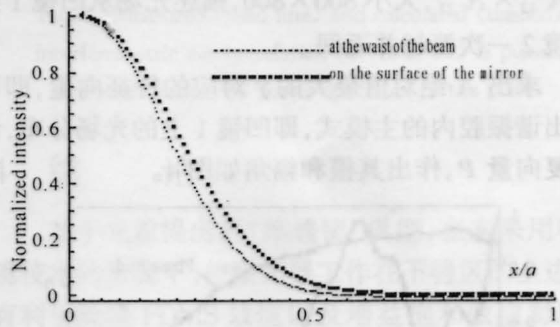

图 2　共焦腔镜表面和束腰处的振幅分布

Fig. 2　Wave intensity at the beam waist and on the mirror surface

由此可求得定义在振幅的 1/e 处的基模光斑尺寸为 $0.09a$，$a = 1.5$ cm 为圆形镜半径，求得 θ 为 5.0 mrad，与理论值(3.2 mrad)基本符合，用 ω_0 求解发散角的方法误差较大，对 ω_0 精度要求较高，这里只做一验证。

3　环耦输出非稳腔的计算

以华工激光的 10 kW 气体激光器的谐振腔计算为例，其光路结构图如图 3 所示。

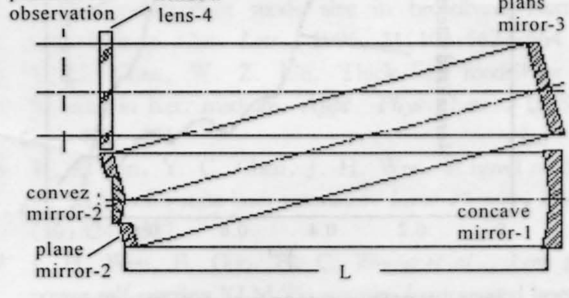

图 3　万瓦气体激光器光路图

Fig. 3　Resonator of CO_2 laser (10 kW)

基本尺寸参数为：凹镜 1：ϕ50 mm，曲率半径 $R_1 = 12100$ mm；凸镜 2：ϕ16 mm，曲率半径 $R_2 = 6000$ mm；平面镜 2：ϕ50 mm，内孔为 ϕ16 mm；平面镜 3：ϕ60 mm，腔长：$L = 3150$ mm；平面镜 3 距离输

出镜 $d=4000$ mm，测斑位置距离输出镜 800 mm。

将凹镜 1 划分为 800 个环状单元，将凸镜 2 划分为 200 个单元，计算从凹镜 1 到凸镜 2 的传输矩阵 A_{12}，大小 800×200，对其进行插值生成矩阵 A'_{12}，大小 800×200，对其进行插值生成矩阵 A'_{12}，大小 800×400；将凸镜 2 划分为 400 个环状单元，将凹镜 1 划分为 400 个单元，计算从凸镜 2 到凹镜 1 的传输矩阵 A_{21}，大小 400×400，对其进行插值生成矩阵 A'_{21}，大小 400×800，最后可得传输矩阵 $A=A'_{12}\times A'_{21}$，大小 800×800，描述光场从凹镜 1 到凸镜 2 一次渡越并返回。

求出 A 绝对值最大的 γ 对应的特征向量，即可求出谐振腔内的主模式，即凹镜 1 上的光场分布，记为复向量 $\boldsymbol{P}$，作出其模和幅角如图 4。

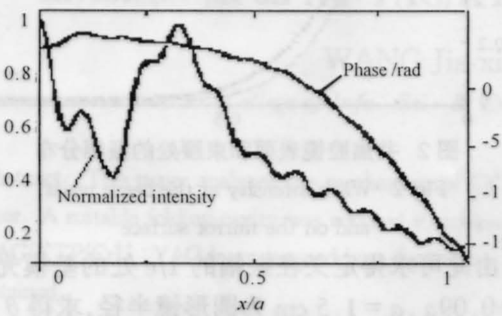

图 4 凹镜 1 上稳定场的振幅和相位分布

Fig. 4 Wave intensity and phase on the surface of concave mirror-1

算得凹镜 1 到平面镜 2 的传输矩阵 B_{12}，$\boldsymbol{P}\times B_{12}$ 即可获得平面镜 2 上的光场分布。如图 5，由于平面镜 2 为环形，中间的振幅和相位均取值为零。

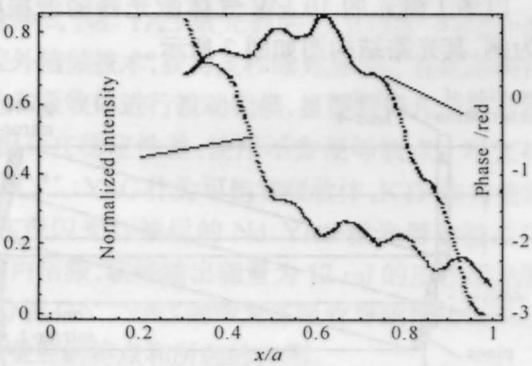

图 5 平面镜 2 上的振幅分布和相位分布

Fig. 5 Plots of wave intensity and phase on plane mirror-2

经平面镜 3、输出镜 4，到达测斑位置的光场传输，采用正逆傅立叶变换[3~5]的方法。算得测斑位置平面光场的光斑分布如图 6 所示，并与实测结果进行了比较（图 7），两者符合得较好。

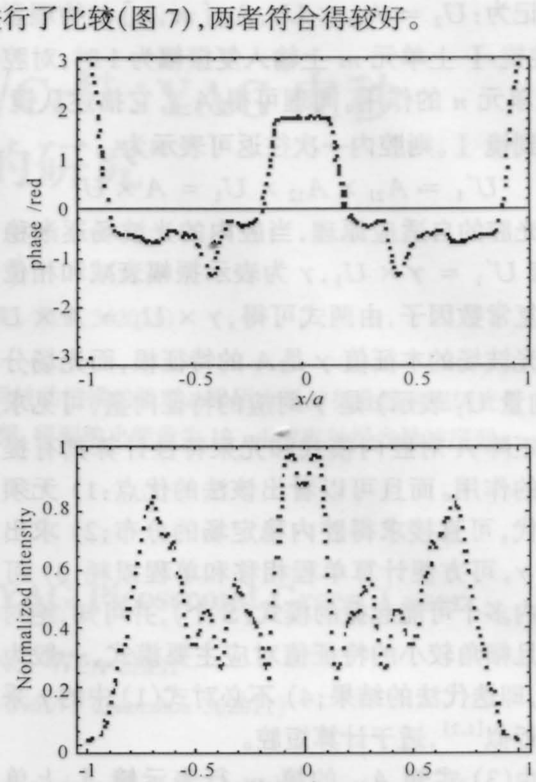

图 6 光斑的振幅和相位分布

Fig. 6 Wave intensity and phase of the pattern

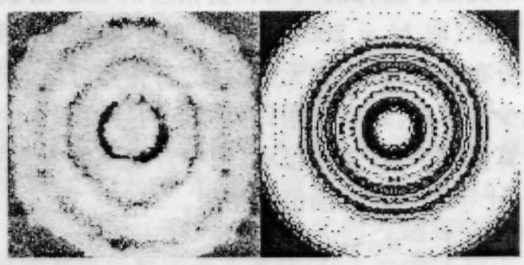

图 7 实测光斑图样与模拟结果比较

Fig. 7 Observed pattern (left) and simulation (right)

4 小 结

本文提出了一种光腔模式计算的数值矩阵方法，并以此计算了实际万瓦气体激光器的非虚共焦非稳腔。该法速度快、精度较高，通过实测证明，此法与实际结果吻合。若涉及的光腔腔形不规则，仍可采用此法。

参 考 文 献

1 李家熔 等. 激光技术，1995，**19**(5)：271

2 厉江帆 等. 应用激光，2000，**20**(1)：16

3 杜燕贻. 强激光与粒子束，2000，**12**(2)：164

4 E. A. Sziklas, A. E. Siegman. *Appl. Opt.*, 1975, 14 (8)：1874

5 Q. Lu. *Eicher J. Opt. Lett.*, 1990, **15**(3)：1357