

文章编号: 0258-7025(2002)Supplement-0037-04

# 量子色噪声对单模激光场的影响

朱佑新 张莉 曹力 吴大进 程祖海

(华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

**摘要** 应用线性化近似方法,得到了含量子色噪声的单模激光增益模型光强的含时矩、关联函数以及功率谱的解析表达式。研究表明,在阈值附近,量子色噪声对单模激光的统计性质产生重要影响。

**关键词** 单模激光, 量子色噪声, 光强含时矩

中图分类号 O431.2 文献标识码 A

## Effect of Quantum Colored Noise on Single-Mode Laser Field

ZHU You-xin ZHANG Li CAO Li WU Da-jin CHENG Zu-hai

(State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

**Abstract** The effect of quantum colored noise on single-mode laser gain model is studied. The analytical expressions of the time-dependent moments, the correlation function and power spectrum of the laser intensity are derived by means of linear approximation method. It is shown that the statistical properties of the laser intensity are mainly decided by quantum colored noise when the laser is operating near the threshold. The conclusion is that the initial plateau of the intensity correlation function observed by experiment is due to the "color" of the noises and predict that the intensity variance will also exhibit initial plateau.

**Key words** single-mode laser, quantum colored noise, time-dependent moment

### 1 引言

激光器工作时总是伴随有涨落的存在。引起激光场涨落的噪声有两类,一类是量子噪声,由原子的自发跃迁引起;另一类是抽运浦噪声,由外部环境的扰动与激光系统的耦合引起。特别是量子噪声,无论激光器是否工作,它始终存在,并对激光器的工作有着至关重要的影响。人们通常假设抽运噪声为色噪声,而量子噪声为白噪声<sup>[1,2]</sup>,通过理论分析,能在一定程度上解释激光系统的一系列反常统计性质。但白噪声只是一种理想模型,为了更接近于实际情况,必须将量子噪声也考虑为色噪声。

本文将两类色噪声均模拟为 O-U 噪声,研究在阈值附近单模激光增益模型的统计性质,主要讨论量子色噪声效应。由于光场朗之万方程中的非线性使得问题的数学处理产生困难,因此本文采用线性化近似方法<sup>[1,2,3]</sup>,得到了光强的含时矩、关联函数以及功率谱的解析表达式。结果分析表明,在阈值附近,单模激光的统计性质主要由量子色噪声决定,抽运噪声的影响极小。此外还得到,引起光强关联函数出现初始平台现象<sup>[3]</sup>的根源是色噪声,并预言光强

协方差也有初始平台现象。

### 2 模型及线性化分析

单模激光增益模型的光强朗之万方程为<sup>[1,2]</sup>

$$\frac{dI}{dt} = -2kI + \frac{2\Gamma I}{1 + \beta I} + D + \frac{2I}{1 + \beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I}q(t) \quad (1)$$

式中  $I$  为激光光强;  $\beta = A/\Gamma$ ,  $A$  和  $\Gamma$  分别为自饱和系数和增益系数;  $K$  为损失系数;  $\xi(t)$  和  $q(t)$  分别为零均值的抽运噪声和量子噪声,且满足

$$\left. \begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \frac{Q}{2\tau_1} \frac{Q}{2\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right) \\ \langle q(t)q(t') \rangle &= \frac{Q}{2\tau_2} \frac{Q}{2\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right) \end{aligned} \right\} (2)$$

式中  $Q, D$  分别为抽运和量子噪声强度;  $\tau_1, \tau_2$  分别为抽运和量子噪声的自关联时间。

将(1)式在稳态光强  $I_0 = (\Gamma - k)/(\beta k)$  附近线性化,设

$$I = I_0 + \delta(t) \quad (3)$$

其中  $\delta(t)$  为微扰项。将(3)式代入方程(1)得

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = -\gamma\delta(t) + D + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}q(t) \quad (4)$$

式中  $\gamma = 2k(\Gamma - k)/\Gamma$ 。对方程(4)直接积分得

$$\delta(t) = \exp(-\gamma t) \left\{ \frac{D}{\gamma} [\exp(\gamma t) + 1] + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \int_0^t \xi(s) \exp(\gamma s) ds + 2\sqrt{I_0} \int_0^t q(s) \exp(\gamma s) ds \right\} \quad (5)$$

由(2)式,(3)式和(5)式可得光强的含时矩、关联函数和功率谱等量的表达式。

### 3 光强的含时矩

由(3)式和(5)式得光强的一阶矩:

$$\langle I(t) \rangle = I_0 + \langle \delta(t) \rangle = I_0 + (D/\gamma)[1 - \exp(-\gamma t)] \quad (6a)$$

$$K_1(t) = \langle I(t) \rangle / \langle I(t) \rangle_{st} = 1 - \frac{(D/\gamma)\exp(-\gamma t)}{I_0 + D/\gamma} \quad (6b)$$

将方程(4)两端同乘  $\delta(t)$  并求平均得

$$\frac{d\langle \delta^2(t) \rangle}{dt} = -\gamma\langle \delta^2(t) \rangle + 2D\langle \delta(t) \rangle + \frac{4I_0}{1 + \beta I_0}\langle \xi(t)\delta(t) \rangle + 4\sqrt{I_0}\langle q(t)\delta(t) \rangle \quad (7)$$

由 Novikov 定理<sup>[4]</sup>得

$$\left. \begin{aligned} \langle \xi(t)\delta(t) \rangle &= \frac{I_0 Q}{(1 + \beta I_0)(1 + \tau_1 \gamma)} \{1 - \exp[-(\gamma + \tau_1^{-1})t]\} \\ \langle q(t)\delta(t) \rangle &= \frac{D\sqrt{I_0}}{1 + \tau_2 \gamma} \{1 - \exp[-(\gamma + \tau_2^{-1})t]\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(8)式代入方程(7)可解得  $\langle \delta^2(t) \rangle$ , 则光强的二阶矩可由

$$\langle I^2(t) \rangle = I_0^2 + 2I_0\langle \delta(t) \rangle + \langle \delta^2(t) \rangle \quad (9)$$

得出。则光强的归一化方差为

$$\begin{aligned} K_2(t) &= \frac{\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2}{(\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2)_{st}} = 1 - \left[ \frac{D}{1 + \tau_2 \gamma} + \frac{I_0 Q}{(1 + \beta I_0)^2(1 + \tau_1 \gamma)} \right]^{-1} \times \\ &\quad \left\{ \left[ \frac{D}{1 + \tau_2 \gamma} + \frac{I_0 Q}{(1 + \beta I_0)^2(1 + \tau_1 \gamma)} \right] \exp(-2\gamma t) + \frac{2D\gamma\tau_2}{\tau_2^2\gamma^2 - 1} \exp[-(\gamma + \tau_2^{-1})t] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2I_0 Q\gamma\tau_1}{(1 + \beta I_0)^2(\tau_1^2\gamma^2 - 1)} \exp[-(\gamma + \tau_1^{-1})t] \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

### 4 光强关联函数和功率谱

根据归一化关联函数的定义

$$\lambda(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle I(t+t')I(t') \rangle - \langle I(t') \rangle^2}{\langle I(t') \rangle^2} = \frac{1}{I_0^2} \lim_{t' \rightarrow \infty} \langle \delta(t+t')\delta(t') \rangle \quad (11)$$

将(5)式代入得

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2D}{I_0(\gamma^2\tau_2^2 - 1)} \left[ \tau_2 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_2}\right) - \gamma^{-1} \exp(-\gamma|t|) \right] + \\ &\quad \frac{2D}{(1 + \beta I_0)^2(\gamma^2\tau_1^2 - 1)} \left[ \tau_1 \exp\left(-\frac{|t|}{\tau_1}\right) - \gamma^{-1} \exp(-\gamma|t|) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{由(12)式得光强的相对涨落 } \lambda(0) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[ \frac{D}{1 + \gamma\tau_2} + \frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2(1 + \gamma\tau_1)} \right] \quad (13)$$

对(12)式作傅里叶变换,得到光强的功率谱为

$$S(\omega) = \frac{4}{\omega^2 + \gamma^2} \left[ \frac{D}{I_0(\omega^2\tau_2^2 + 1)} + \frac{Q}{(1 + \beta I_0)^2(\omega^2\tau_1^2 + 1)} \right] \quad (14)$$

## 5 结果讨论

### 5.1 线性化近似的适用范围

当光强的相对涨落  $\lambda(0)$  较小时, 线性化近似是适用的<sup>[3]</sup>. 由(13)式可知, 抽运噪声和量子噪声的自关联时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  越大,  $\lambda(0)$  越小, 表明色噪声使得线性化近似的适用范围扩大.

### 5.2 光强含时矩

由(6)式可得, 无论激光的工作条件在阈值附近 ( $\Gamma \sim K$ ) 还是在远高于阈值 ( $\Gamma \gg K$ ), 光强的平均值随时间的增大而迅速增加, 并很快达到其定态值, 一阶矩  $K_1(t)$  总是近似等于 1, 而色噪声对光强的平均值或一阶矩没有影响.

由(10)式可得光强协方差  $K_2(t)$  的初始斜率  $\lim_{t \rightarrow 0} [dK_2(t)/dt] = 0$ , 这一结果与白噪声情形 ( $\tau_1$ 、 $\tau_2$  均为零) 显著不同, 这表明色噪声将使得  $K_2(t)$  出现初始平台. 由(10)式作  $\tau_2$  不同时  $K_2(t)$  随时间  $t$  的变化曲线, 如图 1 所示. 由图 1 可知,  $K_2(t)$  随  $t$  的增加而迅速增大, 说明  $K_2(t)$  在较短的时间内达到饱和. 随着  $\tau_2$  的增加,  $K_2(t)$  的值有一定程度的减少, 即  $\tau_2$  的增加使得  $K_2(t)$  达到饱和的时间延长. 可以证明, 此时  $\tau_1$  对  $K_2(t)$  的影响很小.

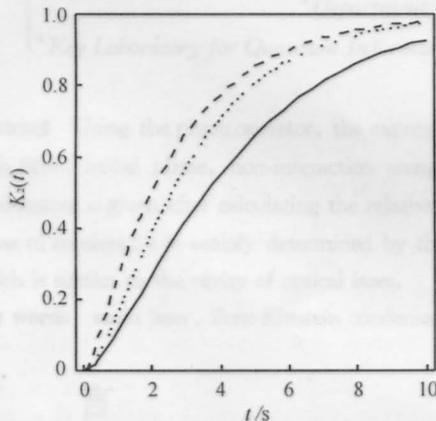


图 1  $\tau_2$  不同时光强协方差  $K_2(t)$  随时间  $t$  的变化曲线. 虚线:  $\tau_2 = 0.2$  s; 点线:  $\tau_2 = 1$  s, 实线:  $\tau_2 = 5$  s; 其他参数取值取  $D = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 10.1 \text{ s}^{-1}$ ,  $k = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\tau_1 = 0.3 \text{ s}$

Fig. 1 Time evolution curves of  $K_2(t)$  for different values of  $\tau_2$ . The dashed line:  $\tau_2 = 0.2$ , the dotted line:  $\tau_2 = 1$  s, the full line:  $\tau_2 = 5$  s. The other parameter values are  $D = 0.5 \text{ s}^{-1}$ ,  $Q = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 10.1 \text{ s}^{-1}$ ,  $k = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\tau_1 = 0.3 \text{ s}$

### 5.3 光强关联函数

由(12)式得光强关联函数  $\lambda(t)$  的初始斜率  $\lim_{t \rightarrow 0}$

$[d\lambda(t)/dt] = 0$ , 这一结果与白噪声情形也不同, 这表明, 实验中观察到  $\lambda(t)$  出现初始平台现象<sup>[3]</sup> 的根源是色噪声. 由(12)式作  $\tau_2$  不同时  $\lambda(t)$  随时间  $t$  的变化曲线, 如图 2 所示. 由图 2 可知,  $\lambda(t)$  随时间  $t$  的增加而衰减. 随着  $\tau_2$  的增加,  $\lambda(t)$  的值减少, 且其衰减被延缓, 即量子色噪声将抑制激光系统的统计涨落. 可以证明,  $\tau_1$  对  $\lambda(t)$  的影响很小, 即此时  $\lambda(t)$  的衰减主要由  $\tau_2$  决定.

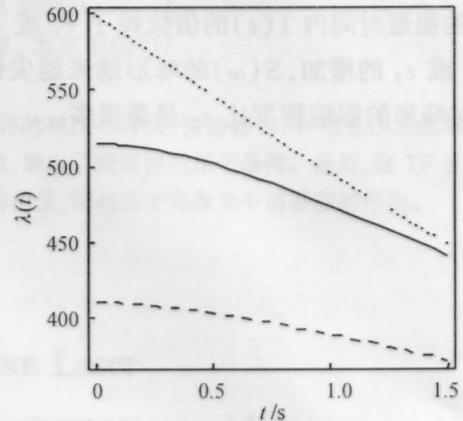


图 2  $\tau_2$  不同时光强关联函数  $\lambda(t)$  随时间  $t$  的变化曲线. 点线:  $\tau_2 = 0$ , 实线:  $\tau_2 = 1$  s, 虚线:  $\tau_2 = 3$  s. 其他参数与图 1 相同

Fig. 2 Time evolution curves of  $\lambda(t)$  for different values of  $\tau_2$ . The dotted line:  $\tau_2 = 0$ , the full line:  $\tau_2 = 1$  s, the dashed line:  $\tau_2 = 3$  s. The rest of the parameters are the same as in Fig. 1

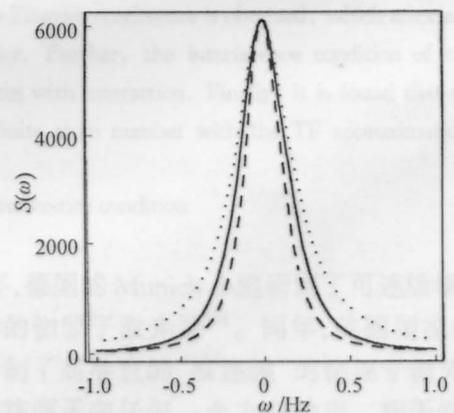


图 3 光强功率谱  $S(\omega)$  随  $\omega$  的变化曲线. 点线:  $\tau_2 = 0$ , 实线:  $\tau_2 = 1$  s, 虚线:  $\tau_2 = 5$  s; 其他参数与图 1 相同

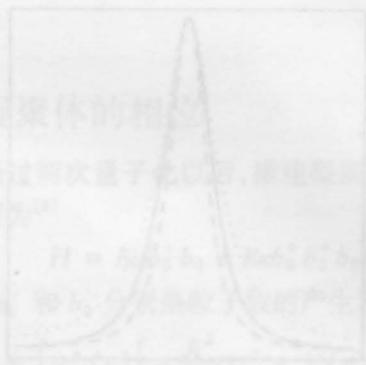
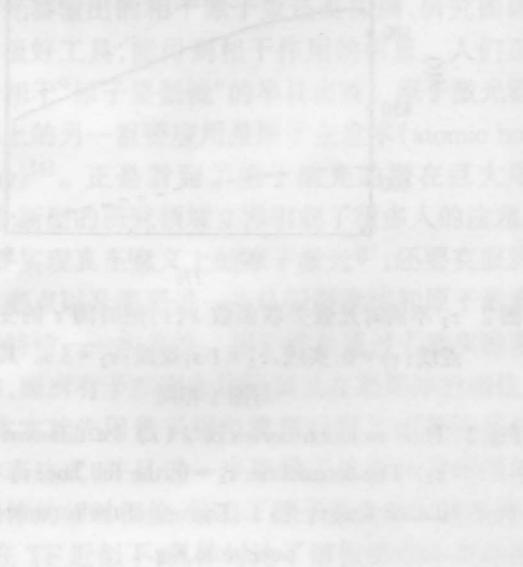
Fig. 3 Power spectrum  $S(\omega)$  against  $\omega$ . The dotted line:  $\tau_2 = 0$ , the full line:  $\tau_2 = 3$  s, the dashed line:  $\tau_2 = 6$  s. The rest of the parameters are the same as in Fig. 1

### 5.4 光强功率谱

由(15)式知, 光强功率谱  $S(\omega)$  为在  $\omega = 0$  处取极大值的单峰, 峰值为  $S_m = \frac{4}{\gamma^2} \left[ \frac{D}{I_0} + \frac{Q}{(1 + \beta I_0)^2} \right]$ ,

即量子色噪声和抽运色噪声的自关联时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  对  $S(\omega)$  的峰值频率和峰值均没有影响。由(15)式作  $S(\omega)$  随  $\omega$  的变化曲线如图3所示,由图可知,  $S(\omega)$  的峰形十分尖锐,  $\tau_2$  的增加使峰形更加尖锐。可以证明,此时  $\tau_1$  对  $S(\omega)$  的影响很小。

应该指出,当激光在远高于阈值条件下工作时,数值计算表明,  $\tau_1$  和  $\tau_2$  对  $K_2(t)$  和  $\lambda(t)$  的影响很小,此时  $K_2(t)$  在极短的时间内达到饱和,仅在激光开通的很短时间内  $\lambda(t)$  的值依赖于  $\tau_1$  或  $\tau_2$ ,但随着  $\tau_1$  或  $\tau_2$  的增加,  $S(\omega)$  的峰形越来越尖锐,并且,  $\tau_1$  对峰形的影响程度比  $\tau_2$  显著很多。



参 考 文 献

- 1 Wang Zhonglong, Cao Li, Qiu Junlin. Correlation function and time-dependent moments of the intensity for gain-noise model of a single-mode laser with exponential function correlation noise. *Chin. Phys. Lett.*, 1998, **15**:498~500
- 2 Zhou Xiaoji, Cao Li, Wu Daojin. Statistical properties of the output light intensity in a single-mode laser driven by correlated noises. *Chin. Phys. Lett.*, 1998, **15**:183~185
- 3 E. Hernandez-Garcia, R. Toral, M. San Miguel. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**: 6823 ~ 6830
- 4 J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz *et al.*. Analytical and numerical studies of multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1982, **26**:1589~1609

... (faded text) ...



... (faded text) ...