第 29 卷 增刊 中 国 激 光 Vol. A29, Suppl.
2002 年 6 月 CHINESE JOURNAL OF LASERS June, 2002

文章编号：0258-7025(2002)Supplement-0029-04

原子激光的相位研究

周小计[1,4] 李卫东[2,4] 陈徐宗[1,4] 王义遒[1,4] 张建玮[3,4]

[1] 北京大学电子学系，北京 100871
[2] 中国科学院物理所，北京 100080
[3] 北京大学技术物理系，北京 100871
[4] 教育部量子信息和测量重点实验室，北京 100871

提要 用量子相位算符计算了凝聚体相位的具体表达式，发现凝聚体的相位与时间，初始相位，非相互作用能和粒子数有关。然后进一步计算了具有相互作用的两凝聚体的相对相位，给出了凝聚体的相干条件。最后，在 TF 近似下，对于谐振势中的一定原子数，发现原子阱基本上决定了凝聚体的相位，它相当于光激光中谐振腔的作用。

关键词 原子激光，玻色-爱因斯坦凝聚，相位，干涉条件

中图分类号 TN241 **文献标识码** A

Study on Phase of Atom Laser

ZHOU Xiao-ji[1,4] LI Wei-dong[2,4] CHEN Xu-zong[1,4]
WANG Yi-qiu[1,4] ZHANG Jian-wei[3,4]

[1] *Department of Electronics, Peking University, Beijing* 100871
[2] *Instiute of Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080
[3] *Department of Technical Physics, Beijing* 100871
[4] *Key Laboratory for Quantum Information and Measurements, Ministry of Education, Beijing* 100871

Abstract Using the phase operator, the expression of the phase of Bose-Einstein condensate is obtained, which associates with time, initial phase, non-interaction energy and the atom number. Further, the interference condition of two condensates is given after calculating the relative phase of two condensates with interaction. Finally, it is found that the phase of condensate is mainly determined by the potential well for a finite atom number with the TF approximation, which is similar to the cavity of optical laser.

Key words atom laser, Bose-Einstein condensation, phase, and the interference condition

1 引 言

激光(包括光激光和原子激光)可以这样来定义[1]，它是产生单模玻色场的装置，这种模式被连续地消耗和补充，形成长时间的输出束。对其输入，除了不能是该装置产生的输出模式外，应该是任意的。对其输出，其模式可近似为具有确定相位和强度的经典波。这样，激光的输出必须满足四个基本的条件：高准直；空间纵向频率只有很小的扩散；输出强度涨落小；输出相位涨落小。

1995 年稀薄原子气体的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)的实现为原子激光提供了相干原子源[2]。1997 年，MIT 实现了钠原子凝聚体的耦合输出[3]。1999 年，德国的 Munich 小组研制了可连续输出 100 多毫秒的铷原子激光器[4]。同年，美国国家标准计量局研制了高准直的“准连续”的钠原子激光器[5]，它能够将原子向任何一个方向输出。相干性，量子性，波动性是原子激光的主要特性，同时，又具有高亮度，单色性，高准直的特征。

光激光器发射的是相干的光波，而原子激光器发射的是相干的物质波。原子激光器和光激光器作为相干量子发生器，其基本特性是一致的。但是，由于原子不能产生和淹没，原子有静质量，原子间有各种相互作用等，这两种激光器又有差别。原子激光器是一种性能全新的相干物质波源，它的出现掀开

了相干物质波物理研究的序幕。它可能使现有的原子钟精度显著提高,它极有可能使人们能建成桌面规模的、用于检验自然界基本力相互关系和基本对称性的装置,它还可能提高基本物理常数的测量精度。它将极大地改善原子干涉等实验。利用原子干涉实验,人们可以更精密地测量重力加速度和引力梯度,极细微的转动等,这对空间科学、地学等相关领域将具有重大推动作用。在技术上,原子激光器使我们能以极高的精确度将原子沉积在固体表面上,即所谓原子制版技术(atom lighography),在原子水平上操纵物质,这将导致纳米技术的极大进展。原子激光器输出的相干原子束还是探测、研究固体表面的极好工具,能得到相干作用的信息。人们正期待着相干“原子显微镜”的早日出现。原子激光器在技术上的另一重要应用是原子全息术(atomic holography)[6]。正是看到了原子激光的潜在巨大用途,这个新型的研究领域立即引起了很多人的注意。但是,要实现真正意义上的原子激光[7],还要克服许多技术难点以及需要进一步认识凝聚体和原子激光的本质特性——相干性。相干性是通过干涉实验来显示的,而所有干涉现象的根源又在凝聚体的相位。为此,本文首先用量子相位算符计算了凝聚体相位的具体表达式,并且进一步推导了具有相互作用的两凝聚体的相对相位,给出了原子激光的干涉条件。最后,在 TF 近似下,具体讨论了谐振势中凝聚体的相位。

2 凝聚体的相位

经过两次量子化以后,描述凝聚体的哈密顿量可以写为[8]

$$H = \hbar\omega b_0^+ b_0 + \hbar\kappa b_0^+ b_0^+ b_0 b_0/2 \tag{1}$$

这里,b_0^+ 和 b_0 分别是粒子数的产生和湮灭算符,

$$\hbar\omega = \int \phi_0^*(r)\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r)\right]\phi_0(r)\mathrm{d}^3 r \tag{2}$$

$$\hbar\kappa = U_0\int|\phi_0(r)|^4\mathrm{d}^3 r \tag{3}$$

ω 表示非相互作用的能量,是凝聚体的动能和约束凝聚体的阱的势能之和,κ 表示凝聚体内原子间的相互作用能。$\phi_0(r)$ 是定态 Gross-Pitaevskii 方程的解

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{trap}}(r) + NU_0|\phi_0(r)|^2\right]\phi_0(r) = \mu\phi_0(r) \tag{4}$$

式中 μ 是化学势,N 是原子数,相互作用势 $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/M$,a 表示波的散射长度,M 是原子质量。

和光场的情况相对应,我们将 P-B 理论[9] 对电磁波的描述扩展到对凝聚体的相位描述。凝聚体的相位态为

$$|\theta_m\rangle = \lim_{s\to\infty}(s+1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{s}\exp(in\theta_m)|n\rangle$$

其中

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}(m = 0,1,2,\cdots s),$$

这里 θ_0 是参考相位,$s+1$ 为单模物质波场的粒子数态矢集$\{|n\rangle\}$张开的希尔伯特空间的维数,每个粒子数态具有的相位权重为 $\exp(in\theta_m)$。这里 θ_m 的表达式满足相位本征态的正交归一化性质。相位算符可以表示为

$$\phi_0 = \sum_{m=0}^{s}\theta_m|\theta_m\rangle\langle\theta_m|$$

它是满足本征值方程的厄米算符。

BEC 的波函数$|\psi(t)\rangle$满足非线性薛定鄂方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

在粒子数矢集$|n\rangle$中,可以求得

$$|\psi(t)\rangle = \exp[-i\hbar(\omega n + \kappa n(n-1)/2]|\psi(0)\rangle \tag{5}$$

设 $t=0$ 时 BEC 初在相干态,可以得到相位分布函数为

$$\langle\theta_m|\psi(t)\rangle = (s+1)^{-1}(2\pi N)^{-1/4}\sqrt{\frac{\pi}{(1/4N+i\kappa t/2)}}f(x)\exp\left[-\frac{(\xi-\theta_m+\kappa t/2-N\kappa t-\omega t)^2}{4(1/4N+i\kappa t/2)}\right] \tag{6}$$

及

$$f(x) = \exp[iN(\xi-\omega t-\theta_m+\kappa t/2-N\kappa t/2)]$$

这里 N 为物质波场的平均原子数,ξ 是凝聚体的初始相位,因此

$$P(\theta,t) = |\langle\theta|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{2\pi}{s+1}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(\theta-\varphi)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{7}$$

其中,$\varphi = \xi - \omega t - \kappa t(N-1/2)$, $\sigma^2 = (1/4N + N\kappa^2 t^2)$

凝聚体的相位 $$\langle \phi \rangle = \int \theta P(\theta, t)\frac{s+1}{2\pi}\mathrm{d}\theta = \phi = \xi - [\omega + \kappa(N - 1/2)]t \tag{8}$$

以及相位的相对涨落 $$(\Delta\phi)^2 = \langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2 = \sigma^2 = 1/4N + N\kappa^2 t^2 \tag{9}$$

如果原子间的相互作用不存在，即 $\kappa = 0$，凝聚体的相位由初始相位，非相互作用能量 ω 和时间的乘积来决定，显然，凝聚体的相位随着时间变化。但是，相位涨落为 $(\Delta\phi)^2 = (4N)^{-1}$，它不随着时间的变化而改变，当 N 很大时，$(\Delta\phi)^2 \to 0$。相位和原子数间的不确定度可以得到最小值 $\Delta N\Delta\phi = 1/2$。然而，由于原子间的相互作用 $\kappa \neq 0$，凝聚体的相位涨落将随着时间而增长，不确定关系变为

$$(\Delta N)^2(\Delta\phi)^2 = N^2\kappa^2 t^2/4 > 1/4$$

我们知道，正是由于原子间的相互作用形成了凝聚体，不包含相互作用的凝聚体的相位显然是不合理的，但是通过分析，凝聚体间的相互作用使得凝聚体相对相位的涨落增大，这样，凝聚体的相互作用又使得凝聚体易于被破坏掉[10]，因此，原子间的相互作用对凝聚体的影响是比较复杂的。

3 凝聚体的干涉条件

我们考虑具有相互作用的两个凝聚体的相对相位，系统哈密顿量

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{\mathrm{int}} \tag{10}$$

这里

$$\hat{H}_i = \int d^3 r\phi^+(r)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\mathrm{trap}} + \frac{U_i}{2}\phi_i^+(r)\phi_i(r)\right]\phi(r) \qquad i = 1,2$$

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = U_{12}\int d^3 r\phi_1^+(r)\phi_2^+(r)\phi_1(r)\phi_2(r)$$

$\phi_i^+(r)$ 和 $\phi_i((r)(i = 1,2)$ 是玻色场算符，$\hat{H}_1$ 和 $\hat{H}_2$ 分别描述阱中每个凝聚体的演化，$\hat{H}_{\mathrm{int}}$ 描述凝聚体间的相互作用。非线性自相互作用 $U_i = 4\pi\hbar^2 a_i/M$，凝聚体间的相互作用势 $U_{12} = 4\pi\hbar^2 a_{12}/M$，$a_{12}$ 表示凝聚体间原子碰撞的散射长度。对于同种原子有 $M_1 = M_2 = M_{12}$。

用同样的方法，我们得到

$$H = \sum_{i=1,2}\left(\hbar\omega_i\hat{b}_i^+\hat{b}_i + \frac{\hbar}{2}\kappa_i\hat{b}_i^+\hat{b}_i^+\hat{b}_i\hat{b}_i\right) + \hbar\chi\hat{b}_1^+\hat{b}_1\hat{b}_2^+\hat{b}_2 \tag{11}$$

这里，

$$\hbar\omega_i = \int\phi_i^*(r)\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V(r)\right]\phi_i(r)d^3 r$$

$$\hbar\kappa_i = U_i\int|\phi_i(r)|^4 d^3 r$$

$$\hbar\chi = U_{12}\int|\phi_1(r)|^2|\phi_2(r)|^2 d^3 r$$

b_0^+ 和 b_0 分别是粒子数的产生和湮灭算符；ω_i 是第 i 个凝聚原子的能量，是原子的动能和谐振势能之和；κ_i 表示每一个凝聚体内原子间的相互作用；χ 是凝聚体间的相互作用。波函数 $\phi_i(x)$ 是每个凝聚体的正交完备基。

设两个凝聚体开始处于相干态 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\alpha_2\rangle$，则可以得到相位分布函数为

$$P(\theta_i, t) = |\langle\theta_i|\phi(t)\rangle|^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{(s+1)\sigma_i}\exp\left[-\frac{(\theta_i - \phi_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

其中，

$$\varphi_i = \xi_i - [\omega_i + \kappa_i N_i + \chi N_{i'}]t \tag{12}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{4N_i} + N_i\kappa_i^2 t^2 + N_{i'}\kappa_i^2 t^2}$$

$$i, i' = 1,2,\ i \neq i'$$

这样，凝聚体的相位为

$$\langle\theta_i\rangle\int\theta_i P(\theta_i, \theta_m, t)\frac{s+1}{2\pi}\mathrm{d}\theta_i = \varphi$$

两凝聚体的相对相位

$$\delta\theta = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{13}$$

两个凝聚体的干涉是理解关联特性的基础，而干涉又是与两个凝聚体的相对相位相联系的，波的干涉条件要求相对相位与时间无关，两个相互作用的凝聚体要有稳定的相位差，即要与时间无关，即

$$\Delta\theta = \xi_1 - \xi_2 + [\omega_1 - \omega_2 + \kappa_1 N_1 - \kappa_2 N_2 + \chi(N_2 - N_1)]t$$

因此，干涉条件就是

$$\omega_1 - \omega_2 + \kappa_1 N_1 - \kappa_2 N_2 + \chi(N_2 - N_1) = 0 \tag{14}$$

最简单的一种情况就是

$$N_1 = N_2 \tag{15a}$$

$$\omega_1 + \kappa_1 N_2 = \omega_2 + \kappa_2 N_2 \tag{15b}$$

(15a)式要求两个凝聚体的粒子数相同,如果两个凝聚体在相同的阱中,就同时可以保证(15b)式的条件成立。因此,最理想的干涉条件可以描述为两个相同粒子数的凝聚体从同一个阱中输出,这是与实验相符的,(14)式给出了一个普遍的两个凝聚体的干涉条件。

4 各向同性势阱中的情况

我们具体计算各向同性谐振势阱中 $V_{\mathrm{trap}}(r) = \frac{1}{2}M\omega_0^2 r^2$ 凝聚体的相位,ω_0 是原子阱的振荡条件。利用 Thomas-Fermi 近似,我们得到[11]

$$\phi = \xi - \left[\frac{5N^{2/3}}{14} + \frac{N^{-3/5}}{7}\right]\chi t \tag{16}$$

其中,

$$\chi = \left[\frac{15^2 a^2 M\omega_0^6}{\hbar}\right]^{1/5} \tag{17}$$

(16)式表明凝聚体的相位除和初始相位有关外,还和 χ,原子数 N 和演化时间 t 相联系。当原子数 N 一定时,相位就有 χ 所决定。对于同种原子,原子质量和散射长度是相同的,因此,由(17)式可知 χ 由阱的振荡频率 ω_0 决定。可以认为 χ(单位为 s^{-1})就是阱的特征参数。对于一定数目的同种原子,在时间 t,阱的特征参数就完全决定了凝聚体的相位,这表明不同阱中的凝聚体具有不同的相位,只有从同一阱中输出的原子才能保证相位的一致性。因此,在原子激光中,我们不可以将一个阱中的原子输出,然后再将另一个阱中的原子输出,用这样的方法来实现长时间连续的原子激光,因为这样无法保证连续输出原子的相位是一致的,这对于实现长时间的连续原子激光是重要的。

总之,我们将凝聚体的相位量子化以后,用量子相位算符计算了凝聚体相位的表达式和相位的相对涨落。在凝聚体的相位中,与时间无关的部分是凝聚体的初始相位,与时间有关的部分可以分为非相互作用能和相互作用能两项。非相互作用能由原子的动能和阱的势能所决定,而相互作用能则与凝聚原子数和原子间的非线性相互作用能有关。我们给出的相位表达式包含了原子间非线性相互作用这个凝聚体的主要特征。当粒子数比较大时,可以忽略原子的动能,在这样的近似下,对于一定粒子数的同种原子,凝聚体的相位由阱的振荡频率所决定。因此,阱的特征参数就完全决定了凝聚体的相位,这表明我们要实现长时间连续的原子激光,只能从同一阱中输出。同时,我们计算了具有相互作用的两个凝聚体的相对相位,给出了两个凝聚体的普遍干涉条件。在实验上一个简单的情况可以表述为具有相同粒子数的两个凝聚体从同一阱中输出。我们希望上述讨论不仅有助于对凝聚体相干性的理解和理论的完善,而且有助于探讨象原子激光等的相干物质波的应用。

参 考 文 献

1 *H. M. Wiseman*. Phys. Rev. A, 1997, **56**(3):2068～2084

2 *M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews* et al.. Science, 1995, **269**(5221):198～201

3 *M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner* et al.. Science, 1997, **275**(5300):637～641

4 *I. Bloch, T. W. Hansch, T. Esslinger*. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**(15):3008～3011

5 *E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma* et al.. Science, 1999, **283**(5408):1706～1709

6 周小计,王义遒.玻色-爱因斯坦凝聚和原子激光.物理教学, 2001, **3**(1):1～4

7 *X. J. Zhou, Y. Q. Wang, D. H. Yang*. Chin. Phys. Lett., 2000, **17**(11):784～786

8 *A. S. Parkins, D. F. Walls*. Physics Reports, 1998, **303**(1):2～80

9 彭金生,李高翔.近代量子光学导论.北京:科学出版社,1996. 62～76

10 *W. D. Li, X. J. Zhou, Y. Q. Wang* et al.. Phys. Lett. A, 2001, **285**(6):45～48

11 *X. J. Zhou, Y. Q. Wang, W. D. Li*. *Commun*. Theor. Phys., 2001, **36**(3):267～270