

文章编号: 0258-7025(2002)Supplement-0007-04

有色关联的色加法和色乘法噪声驱动的单模激光系统的定态几率分析

梁贵云 王 俊 曹 力 吴大进

(华中科技大学激光国家重点实验室, 武汉 430074)

提要 根据有色关联的乘法色噪声和加法色噪声驱动的一般系统的近似福克-普朗克方程, 得出有色关联的泵色噪声和色量子噪声的单模激光三次方模型的光场幅定态几率分布。分析了噪声的互关联、关联时间 τ 以及净增益系数 a_0 对场幅定态几率分布的影响, 以及不同噪声关联时间下乘性噪声强度对方差的影响。发现了若干新颖现象。

关键词 单模激光, 色噪声, 色关联效应, 定态几率分布

中图分类号 TN241 文献标识码 A

SPD of Single-Mode Laser Intensity Driven by Color Correlated Additive Color Noise and Multiplicative Noise

LIANG Gui-yun WANG Jun CAO Li WU Da-jin

(State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract Based on an approximative Fokker-Planck equation for a system driven by a multiplicative colored noise and an additive colored noise that are cross-correlated, the stationary probability distribution (SPD) of the single-mode laser cubic model with correlated pump colored noise and quantum colored noise is derived. Moreover, the influence of cross-correlation, correlation-time and net gain on the SPD, and the influence of multiplicative noise on the normalized variance with the different correlation-time are also studied.

Key words single-mode laser, colored noise, colored - correlation effect, stationary probability distribution (SPD)

1 引 言

单模激光系统的统计涨落性质受到极大的关注^[1]。然而大量的工作是把乘法噪声(抽运噪声)和加法噪声(量子噪声)加以理想化, 即看作高斯白噪声。在这种近似处理下, 也获得与实验较好一致的结果^[2]。但是, 认为抽运噪声和量子噪声为高斯白噪声, 对于色噪声驱动的激光系统研究较少。

本文研究了乘法和加法噪声都是色噪声, 且关联也是色关联下的光强分布受各参量的影响情况。

2 具有色关联的色加法噪声和色乘法噪声驱动系统的近似福克-普朗克方程

我们发展了一种处理具有色关联的加法色噪声和乘法色噪声驱动系统的近似方法, 特点是噪声间的互关联时间和噪声的自关联时间可以不相等。

系统的朗之万方程:

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t) \quad (1)$$

其中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 为零均值的高斯色噪声, 其统计性质为:

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \gamma_{11}(t, t') = \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = (P'/\tau_1)\exp(-|t-t'|/\tau_1) \\ \gamma_{22}(t, t') = \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = (D/\tau_2)\exp(-|t-t'|/\tau_2) \\ \gamma_{21}(t, t') = \gamma_{12}(t, t') = \langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = \frac{\lambda\sqrt{DP'}}{\tau_3}\exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right) \end{cases} \quad (2)$$

根据(1)式对应的随机刘维方程及 Van Kamp 引理: $P(x, t) = \langle \delta[x(t) - x] \rangle$, 得出(1)式对应的几率演化方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x, t) - \\ & \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \langle \xi(t) \delta[x(t) - x] \rangle - \\ & \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \langle \eta(t) \delta[x(t) - x] \rangle \quad (3) \end{aligned}$$

为了计算(3)式中的 $\langle \xi(t) \delta[x(t) - x] \rangle$ 及 $\langle \eta(t) \delta[x(t) - x] \rangle$, 使用了 Novikov 定理^[3]

$$\langle \xi_k \phi[\xi_1, \xi_2] \rangle = \int_0^t dt' \gamma_{k1} \left\langle \frac{\delta \{ \delta[x(t) - x] \}}{\delta \xi_1} \right\rangle \quad (4)$$

其中 $\phi[\xi_1, \xi_2]$ 是噪声 ξ_1, ξ_2 的泛函, $\gamma_{k1} = \langle \xi_k(t) \xi_1(t') \rangle$ 是两噪声的关联函数。最后得到下面的近似福克-普朗克方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = & -\frac{\partial}{\partial x} f(x) P(x, t) + \frac{P'}{1 - \tau_1 \{ f'(x_s) - [g'_1(x_s)/g_1(x_s)] f(x_s) \}} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t) + \\ & \frac{\lambda \sqrt{DP'}}{1 + \tau_3 \{ f'(x_s) - [g'_2(x_s)/g_2(x_s)] f(x_s) \}} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t) + \\ & \frac{D}{1 + \tau_2 \{ f'(x_s) - [g'_2(x_s)/g_2(x_s)] f(x_s) \}} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) \frac{\partial}{\partial x} g_2(x) P(x, t) + \\ & \frac{\lambda \sqrt{DP'}}{1 + \tau_3 \{ f'(x_s) - [g'_1(x_s)/g_1(x_s)] f(x_s) \}} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) \frac{\partial}{\partial x} g_1(x) P(x, t) \quad (5) \end{aligned}$$

其中 x_s 为确定论势决定的定态位置。

这个近似福克-普朗克方程在下面条件是有效的:

$$1 - \tau_1 \{ f'(x_s) - [g'_j(x_s)/g_j(x_s)] f(x_s) \} > 0 \quad (6)$$

其中 $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$, (6) 式起到对关联时间的限制作用。

3 单模激光系统光强的定态分布与方差

考虑如下的单模激光朗之万方程:

$$\dot{x} = a_0 x - Ax^3 + \frac{D_2}{x} + x\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) \quad (7)$$

其中 a_0 为净增益, A 为自饱和系数, $x = \sqrt{I}$, I 为激光光强。噪声的统计性质为:

$$\langle \Gamma_1(t) \Gamma_1(s) \rangle = \frac{D_1}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right)$$

$$\langle \Gamma_2(t) \Gamma_2(s) \rangle = \frac{D_2}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right)$$

$$\langle \Gamma_1(t) \Gamma_2(s) \rangle = \frac{\lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right)$$

以上假设三个关联时间同为 τ 。

用我们发展的近似方法, 可得出相应于上述朗之万方程的福克-普朗克方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) Q(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x) Q(x, t) \quad (8)$$

其中

$$V(x) = a_0 x - Ax^3 + \frac{D_2}{x} + \frac{D_1 x + \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{1 + 2a_0 \tau}, \quad G(x) = \frac{D_1 x^2 + 2\lambda \sqrt{D_1 D_2} x + D_2}{1 + 2a_0 \tau}, \quad 1 + 2a_0 \tau > 0$$

定态几率分布求得为: 当 $0 \leq \lambda < 1$ 时,

$$\begin{aligned} Q(x) = & N(D_1 x^2 + 2\lambda \sqrt{D_1 D_2} x + D_2)^{\alpha} x^{(1+2a_0\tau)} (1 + 2a_0\tau) \times \\ & \exp\left[-\beta x^2 + 4\lambda\beta \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} x + \gamma \arctan\left[\frac{D_1 x + \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{D_1 D_2} (1 - \lambda^2)}\right]\right] \quad (9) \end{aligned}$$

其中

$$\beta = \frac{A(1 + 2a_0\tau)}{2D_1}, \quad \alpha = \beta \left(\frac{a_0}{A} + \frac{D_2}{D_1} - 4\lambda^2 \frac{D_2}{D_1} \right) - a_0\tau - 1,$$

$$\gamma = - \left[4\lambda\beta \frac{D_2}{D_1} + 2\lambda\beta \left(\frac{a_0}{A} + \frac{D_2}{D_1} - 4\lambda^2 \frac{D_2}{D_1} \right) - \lambda(1 + 2a_0\tau) \right] / \sqrt{1 - \lambda^2}$$

当 $\lambda = 1$ 时,

$$Q(x) = N(\sqrt{D_1}x + \sqrt{D_2}^{2a_0} x^{(1+2a_0\tau)}) \exp \left[-\beta_0 x^2 + 4\lambda\beta_0 \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} x + \frac{\gamma_0}{1 + \sqrt{D_1/D_2} x} \right] \quad (10)$$

其中

$$\beta_0 = \frac{A(1+2a_0\tau)}{2D_1}, \quad \alpha_0 = \left(\frac{a_0}{2D_1} - \frac{3AD_2}{2D_1^2} \right) (1+2a_0\tau) - a_0\tau - 1, \quad \gamma_0 = \left(\frac{a_0}{A} - \frac{AD_2}{D_1^2} + 1 \right) (1+2a_0\tau)$$

光强的归一化方差为

$$\lambda_2(0) = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1 \quad (11)$$

4 结论和讨论

(9)式、(10)式在 $\tau = 0$ 时,回到朱士群的结果^[1]。在 $\tau \neq 0$ 时,显示出激光的一系列色噪声效应和噪声关联效应。

4.1 噪声关联强度对定态几率分布的影响

由(9)式画出了不同关联强度下的定态几率分布,如图1和图2。

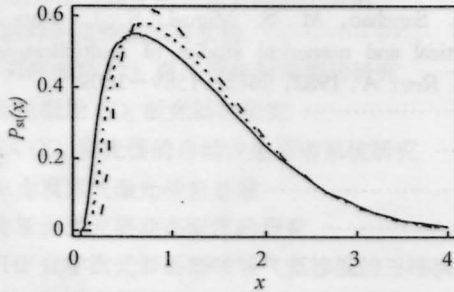


图1 不同关联强度下的定态几率分布,参数 $a_0=2, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.3$ 。——: $\lambda=0$,
.....: $\lambda=-0.5$; ----: $\lambda=-0.9$

Fig.1 SPD with different strength of correlated-noises, parameter: $a_0=2, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.3$.

——: $\lambda=0$,: $\lambda=-0.5$; ----: $\lambda=-0.9$

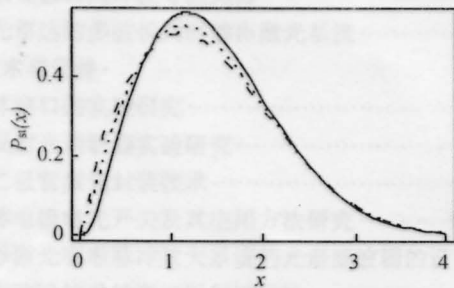


图2 不同关联强度下的定态几率分布,参数 $a_0=2.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。——: $\lambda=0$,
.....: $\lambda=0.5$; ----: $\lambda=0.9$

Fig.2 SPD with different strength of correlated-noises, parameter: $a_0=2.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。——: $\lambda=0$,: $\lambda=0.5$; ----: $\lambda=0.9$

当 $\lambda \geq 0$ 时,光强几率分布的峰值随关联强度 λ

的增大而减小;当 $\lambda < 0$ 时,其峰值随 $|\lambda|$ 的增大而增大;而无论噪声间的关联为正或为负,其光强几率分布的峰值随关联时间的增大而增大。

3.2 净增益对定态几率分布的影响

由(9)式,画出了不同净增益系数 a_0 下的定态几率分布,如图3和图4。当 $\tau \neq 0$ 时,光强几率分布的峰值随净增益 a_0 的增大而先减小后增大; $\tau = 0$ 时,其分布的峰值随净增益 a_0 的增大而减小,后趋于恒值,且分布更分散。

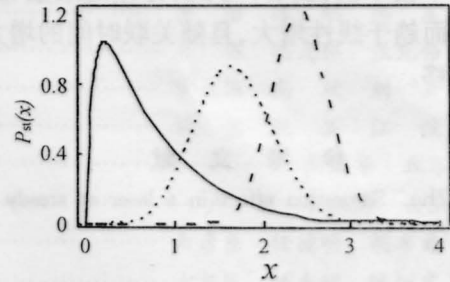


图3 不同净增益下的定态几率分布,参数 $\lambda=0.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。

——: $a_0=0$,: $a_0=3$; ----: $a_0=6$

Fig.3 SPD with different net gain, parameters: $\lambda=0.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。——: $a_0=0$,: $a_0=3$; ----: $a_0=6$

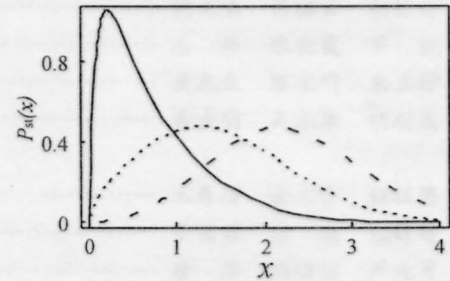


图4 不同净增益下的定态几率分布,参数 $\lambda=0.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。

——: $a_0=0$,: $a_0=3$; ----: $a_0=6$

Fig.4 SPD with different net gain, parameters: $\lambda=0.5, A=1, D_1=0.1, D_2=4.26, \tau=0.5$ 。——: $a_0=0$,: $a_0=3$; ----: $a_0=6$

3.3 乘性噪声强度对系统方差的影响

由(11)式,画出了不同关联时间下的系统方差随乘性噪声强度的变化曲线,如图5和图6。当 $\lambda=1$

