

文章编号: 0258-7025(2002)08-0743-05

# 多重分数傅里叶变换全息防伪术

曾阳素<sup>1,2</sup>, 张怡霄<sup>1</sup>, 杜惊雷<sup>1</sup>, 郭永康<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 四川大学物理系, 四川成都 610064; <sup>2</sup> 邵阳学院物理系, 湖南邵阳 422000)

**提要** 基于分数傅里叶变换全息图(FRTH)的记录和再现的特殊性, 提出一种记录多重全息图的新方法, 可发展一种多重 FRTH 防伪术。即利用简单的分数傅里叶变换系统, 并改变其分数阶, 就可以很方便地在一块感光板上分别记录多个物体(或同一物体的不同部分)在不同位置上的不同阶的 FRTH。制作了多重分数傅里叶变换全息图, 讨论了其防伪特性, 并获得了满意的再现结果。

**关键词** 分数傅里叶变换, 全息图, 防伪

中图分类号 O 438.1 文献标识码 A

## Multiple Fractional Fourier Transform Hologram Applied in Anti-counterfeiting

ZENG Yang-su<sup>1,2</sup>, ZHANG Yi-xiao<sup>1</sup>, DU Jing-lei<sup>1</sup>, GUO Yong-kang<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)  
(<sup>2</sup> Department of Physics, Shaoyang University, Shaoyang 422000)

**Abstract** Based on the characteristics of the FRTH in recording and reconstruction, a multiple fractional Fourier transform hologram(M-FRTH) and its application in anti-counterfeiting were proposed. The FRTH of several objects (or different parts of one object) with different transform order in different positions were respectively recorded on one holographic plate with simple fractional Fourier transform system conveniently. The multiple fractional Fourier transform hologram was fabricated and its characteristics in anti-counterfeiting were discussed.

**Key words** fractional Fourier transform(FRT), hologram, anti-counterfeiting

### 1 引 言

自 Lohmann 提出用普通透镜实现分数傅里叶变换(FRT)后, 为分数傅里叶变换在光学中的应用开辟了广阔的领域<sup>[1~4]</sup>。分数傅里叶变换全息图(FRTH)是基于 FRT 的一种新型全息图<sup>[5,6]</sup>, 它是利用物光波经分数傅里叶变换后的光波与参考光波干涉所形成的干涉图样, 即分数傅里叶变换全息图记录的是物光波经特定阶分数傅里叶变换的波前。因此, FRTH 既记录有物光波的信息, 又记录有分数傅里叶变换系统的信息。为了利用 FRTH 再现原物体的像, 用原参考光照明全息图后, 还须使全息图再现

的波前再经过一个与原记录系统的变换阶相匹配的另一分数傅里叶变换系统后才能成像。

本文提出, 基于 FRTH 的记录和再现的特殊性, 可发展一种记录多重全息图的新方法, 即利用简单的分数傅里叶变换系统, 并改变其分数阶, 就可以很方便的在一块感光板上分别记录多个物体(或同一物体的不同部分)在不同位置上的不同阶的 FRTH。它需要多个不同变换阶的分数傅里叶变换系统才能在空间不同位置上分别再现所记录的物体完全相同的图像。由于这些信息分布在三维空间的不同位置 and 不同方位上, 又需要不同阶的分数傅里叶变换系

收稿日期: 2001-07-04; 收到修改稿日期: 2001-09-11

基金项目: 国家自然科学基金(编号: 69907003)和四川大学青年基金资助项目。

作者简介: 曾阳素(1958—), 男, 湖南邵阳学院副教授, 四川大学光学博士生, 主要从事信息光学等方面的研究。E-mail:

统才能准确再现,具有多个防伪自由度,因此可以制成一种新的光学安全认证系统或防伪系统,使其具有较高的防伪力度。

## 2 多重分数傅里叶变换全息图的记录和再现光路

### 2.1 记录光路

多重分数傅里叶变换全息图(M-FRTH)记录光路如图1所示,设多个物体(或将一个物体分割为几个部分)分别处在不同的位置上,即物函数分别为  $g_0(x_0, y_0, z_0), g_0'(x_0 + a_0, y_0 + b_0, z_0'), g_0''(x_0 - a_0, y_0 - b_0, z_0''), g_0'''(x_0, y_0, z_0''')$ ....., 对应于各个物函数的  $P_1, P_1', P_1'', P_1'''$ ..... 阶分数傅里叶变换分别为  $g_1(x_1, y_1, z_0), g_1'(x_1 + a_1, y_1 + b_1, z_0'), g_1''(x_1 - a_1, y_1 - b_1, z_0''), g_1'''(x_1, y_1, z_0''')$ .....。其

中  $a_0, b_0, a_1, b_1$  均为常数。引入参考光  $R$  分别和各个物体的分数傅里叶变换光场干涉,经过多次曝光后,在同一块感光板上记录了多个物体不同阶的分数傅里叶变换全息图。

### 2.2 再现光路

如图2,用原参考光  $R$  照明全息图,将再现出物光波  $g_0(x_0, y_0, z_0), g_0'(x_0 + a_0, y_0 + b_0, z_0'), g_0''(x_0 - a_0, y_0 - b_0, z_0''), g_0'''(x_0, y_0, z_0''')$ ..... 分别经  $P_1, P_1', P_1'', P_1'''$ ..... 阶分数傅里叶变换后的光场。然后对分数傅里叶变换全息图再现的各个光场实行逆变换,或前后移动透镜  $L$  实行与原变换阶数  $P_1, P_1', P_1'', P_1'''$ ..... 相匹配的  $P_2, P_2', P_2'', P_2'''$ ..... 阶变换(如  $P_1 + P_2 = 2, P_1' + P_2' = 2, P_1'' + P_2'' = 2, P_1''' + P_2''' = 2$ .....)则在不同输出面的不同位置上可分别得到像  $g_2, g_2', g_2'', g_2'''$ .....。

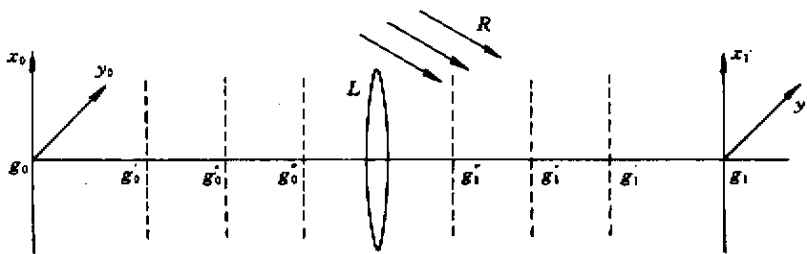


图1 M-FRTH 记录光路  
Fig.1 Recording of M-FRTH

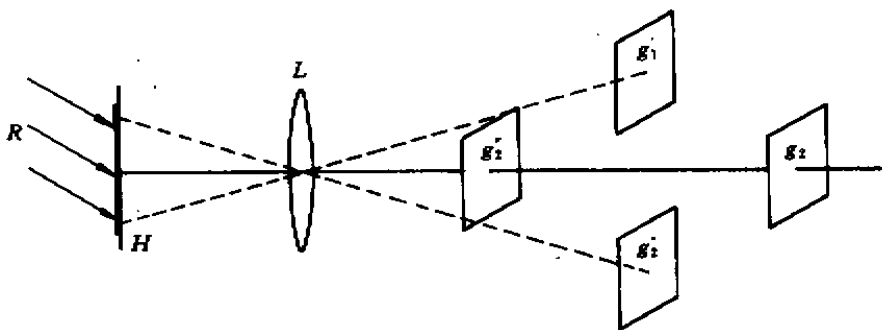


图2 M-FRTH 再现光路  
Fig.2 Reconstruction of M-FRTH

## 3 记录和再现原理

### 3.1 记录

为分析简单起见,我们以二重分数傅里叶变换全息图(D-FRTH)为例说明 M-FRTH 的记录和再现原理。FRTH 是在分数傅里叶变换域上用全息的方法记录下物光波的分数傅里叶变换分布。二重分数

傅里叶变换全息图就是在同一块感光板上记录二个不同物体的不同阶分数傅里叶变换全息图,记录光路如图3所示。

图中  $g_0(x_0)$  与  $g_0'(x_0)$  是二个不同的物函数,  $g_1(x_1)$  与  $g_1'(x_1)$  分别对应于  $g_0(x_0)$  与  $g_0'(x_0)$  的  $P_1$  与  $P_1'$  阶分数傅里叶变换,即

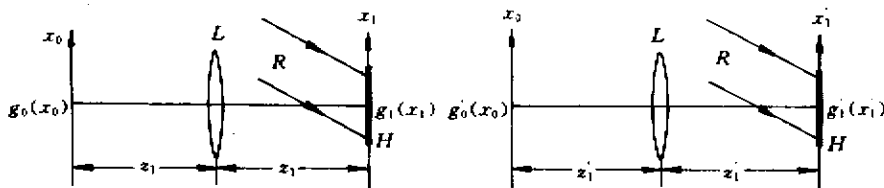


图3 D-FRTH记录光路

Fig.3 Recording of D-FRTH

$$g_1(x_1) = F^{P_1}[g_0(x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} B_{P_1}(x_0, x_1) g_0(x_0) dx_0 \quad (1)$$

$$g_1'(x_1') = F^{P_1'}[g_0'(x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} B_{P_1'}(x_0, x_1') g_0'(x_0) dx_0 \quad (2)$$

式中  $B_{P_1}, B_{P_1'}$  分别为相应的 FRT 的核函数。

对于 Lohmann I 型光学装置<sup>[7]</sup>, 透镜的焦距  $f$  与输入面到透镜的距离  $z$  应满足条件

$$\begin{aligned} f &= f_1 / \sin(P\pi/2) \\ z &= f_1 \tan(P\pi/4) \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $f_1 = f \cdot \sin(P\pi/2)$  称为标准焦距。将(3)式代入(1)与(2)式, 可得

$$\begin{aligned} g_1(x_1) &= \int g_0(x_0) \exp\{i\pi(x_0^2 + x_1^2) / \\ &[\lambda f \sin(P_1\pi/2) \tan(P_1\pi/2)]\} \times \\ &\exp\{-i2\pi x_0 x_1 / [\lambda f \sin^2(P_1\pi/2)]\} dx_0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g_1'(x_1') &= \int g_0'(x_0) \exp\{i\pi(x_0^2 + x_1'^2) / \\ &[\lambda f \sin(P_1'\pi/2) \tan(P_1'\pi/2)]\} \times \\ &\exp\{-i2\pi x_0 x_1' / [\lambda f \sin^2(P_1'\pi/2)]\} dx_0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\lambda$  为记录光波长。设  $R$  为记录时的参考光, 两次曝光时间为  $t_1$  和  $t_2$ , 在线性记录条件下, 全息图的振幅透射系数  $\tau_H$  与曝光量成正比, 即

$$\begin{aligned} \tau_H &\propto t_1 |g_1(x_1) + R|^2 + t_2 |g_1'(x_1') + R|^2 = \\ &t_1 (|g_1|^2 + |R|^2) + t_1 g_1^* R + t_1 g_1 R^* + \\ &t_2 (|g_1'|^2 + |R|^2) + t_2 g_1'^* R + t_2 g_1' R^* \end{aligned} \quad (6)$$

### 3.2 再现

由原参考光  $R$  照明全息图, 将再现出物光波  $g_0(x_0)$  和  $g_0'(x_0)$  分别经  $P_1, P_1'$  阶分数傅里叶变换后的光场。由式(6)得再现光波为

$$\begin{aligned} i &= t_1 [ |g_1(x_1)|^2 + |R|^2 ] R + t_1 g_1(x_1)^* R^2 + \\ &t_1 g_1(x_1) |R|^2 + t_2 [ |g_1'(x_1')|^2 + |R|^2 ] R + \end{aligned}$$

$$t_2 g_1'(x_1')^* R^2 + t_2 g_1'(x_1') |R|^2 \quad (7)$$

(7) 式中第一、四两项包含零级光和晕轮光, 第二、五两项是共轭像项, 第三、六两项是原始像项。单独考虑原始像项

$$\left. \begin{aligned} t_1 |R|^2 g_1(x_1) &= t_1 |R|^2 F^{P_1}[g_0(x_0)] \\ t_2 |R|^2 g_1'(x_1') &= t_2 |R|^2 F^{P_1'}[g_0'(x_0)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其复振幅为

$$A = t_1 |R|^2 g_1(x) + t_2 |R|^2 g_1'(x_1') \quad (9)$$

强度为  $I \propto AA^*$ 。

要得到物体  $g_0(x_0)$  与  $g_0'(x_0)$  的像, 需对全息图的再现光场实行与原变换阶  $P_1, P_1'$  相匹配的  $P_2, P_2'$  阶分数傅里叶变换。两原始像项再分别经  $P_2, P_2'$  阶分数傅里叶变换到达输出面  $x_2$  和  $x_2'$ , 其光场分布为

$$\left. \begin{aligned} g_2(x_2) &= F^{P_2}\{t_1 |R|^2 F^{P_1}[g_0(x_0)]\} = \\ &t_1 |R|^2 F^{P_1+P_2}[g_0(x_0)] \\ g_2'(x_2') &= F^{P_2'}\{t_2 |R|^2 F^{P_1'}[g_0'(x_0)]\} = \\ &t_2 |R|^2 F^{P_1'+P_2'}[g_0'(x_0)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

根据分数傅里叶变换的周期性, 当  $P_1 + P_2 = 4$  或  $P_1' + P_2' = 4$  时, 在输出面上将获得物体的等大而正立的像。特别是

当  $P_1 + P_2 = 2$  时,

$$g_2(x_2) \propto F[g_0(x_0)] = g_0(-x_0) \quad (11a)$$

当  $P_1' + P_2' = 2$  时,

$$g_2'(x_2') \propto F[g_0'(x_0)] = g_0'(-x_0) \quad (11b)$$

即最后的再现光场是相应的物光场的坐标反演。在二个不同输出面上将分别获得与原物等大而倒立的像, 如图4所示。也就是说, 利用 FRT 的周期性和再现像的位置与再现系统及分数阶有关的特性, 可在不同位置再现出不同物体的像, 而其余信息则形成背景噪声。

由上面分析可知, 普通的多重菲涅耳全息图是通过旋转全息干版来记录的, 而多重分数傅里叶变换全息图是基于分数傅里叶变换, 通过改变分数阶

来实现的,它具有更大的灵活性。多重分数傅里叶变换全息图不仅记录了多个不同物体的信息,而且还记录了相应多个系统的信息,如透镜的焦距  $f$ ,物体与透镜的距离  $z_1, z_2, z_3$  等,由它们所决定的分数阶可作为新的密钥。此外多重分数傅里叶变换全息图的多个再现像一般在多个不同的位置,只需适当选取记录时物体与透镜远近不同的距离  $z_1, z_1', z_1''$ ,

..... 便可使多个再现像之间的距离在很大范围内变化。如果多个物体  $g_0(x_0), g_0'(x_0), g_0''(x_0), \dots$  分别处在物面多个不同位置(如上下或左右错开),则再现时零级光产生的噪声对某一个再现像的影响可忽略,且可减少多个再现像的交叉影响,此时某一物体的再现像位置处的背景噪声将大为减少。

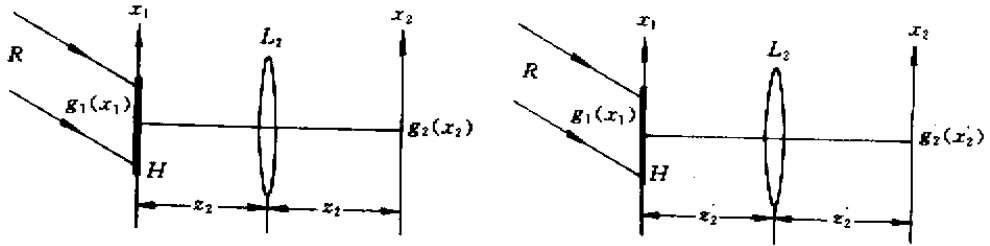


图 4 D-FRTH 再现光路

Fig.4 Reconstruction of D-FRTH

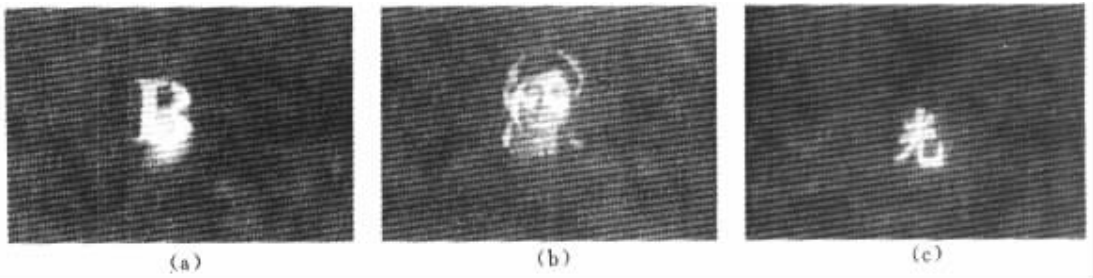


图 5 M-FRTH 实验再现结果图

Fig.5 Reconstruction results of M-FRTH

The fractional order, (a)  $P_1 = 1.5, P_2 = 0.5, z_2 = 87.9 \text{ mm}, t_1 = 8 \text{ s}$ ; (b)  $P_1' = 1.25, P_2' = 0.75, z_2' = 185.2 \text{ mm}, t_2 = 10 \text{ s}$ ; (c)  $P_1'' = 1.00, P_2'' = 1.00, z_2'' = 300 \text{ mm}, t_3 = 12 \text{ s}$

### 4 实验

以三重分数傅里叶变换全息图为例,它的记录过程分三步进行:1)先用经扩束的平行 He-Ne 激光照明透明物体  $g_0(x_0)$ , (即“B”),参考光  $R$  与物光大约成  $30^\circ$  角,透镜焦距  $f = 300 \text{ mm}$ ,分数傅里叶变换阶为  $P_1 = 1.5$ ,第一次曝光时间  $t_1 = 8 \text{ s}$ 。2)保持参考光  $R$  与物体的照明光不变,换上另一透明物体  $g_0'(x_0)$ , (即“人像”),透镜的焦距仍为  $f = 300 \text{ mm}$ ,此时的分数傅里叶变换阶为  $P_1' = 1.25$ ,再对全息干版进行第二次曝光,曝光时间  $t_2 = 10 \text{ s}$ 。3)仍然保持参考光  $R$  与物体的照明光不变,再换上另一离轴透明物体  $g_0''(x_0)$  (即“光”),透镜的焦距仍为  $f = 300 \text{ mm}$ ,此时的分数傅里叶变换阶为  $P_1'' = 1.00$ ,再对全息干版进行第三次曝光,曝光时间  $t_2 = 12 \text{ s}$ 。经显影、定影得 M-FRTH。

图 5 是用 CCD 记录的实验结果,即是用原参考光照射,再分别经相匹配的分数傅里叶变换后(即解码)所观察到的像。图 5(a)中再现系统的分数阶为  $P_2 = 0.5$  相应的  $z_2 = 87.9 \text{ mm}$ ,此时输出面只有一个清晰的像,即“B”,而另二个物体的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。图 5(b)中,再现系统的分数阶为  $P_2' = 0.75$ ,相应的  $z_2' = 185.2 \text{ mm}$ ,此时输出面也只有一个清晰的像,即“人像”,而“B”和“光”的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。图 5(c)中,再现系统的分数阶为  $P_2'' = 1.00$ ,相应的  $z_2'' = 300 \text{ mm}$ ,此时输出面也只有一个清晰的像,即“光”,而“B”和“人像”的像则为模糊的背景噪声,无法辨认。实验表明,在同一块感光板上对三个不同物体分别用不同的分数阶  $P_1, P_1', P_1''$  的变换系统记录,则在其相匹配的  $P_2, P_2', P_2''$  阶变换系统中再现时,各自输出面的位置是不一样的。

## 5 防伪特性

由于多重分数傅里叶变换全息图不仅记录了多个不同物体的信息(或分别记录了一个物体的不同部分的信息)而且还分别记录了相应的多个变换系统的信息,如每个系统透镜的焦距  $f$ ,物体与透镜的距离  $z_1, z_2, z_3, \dots$ 。因此在记录多重分数傅里叶变换全息图时,可分别对每个物体进行尺度编码,为了读出经编码的多个物体的信息,每个物体再现像所对应的分数傅里叶变换系统的分数阶必须与其相应记录系统的分数阶匹配,我们可依据能否在多个特定的分数傅里叶变换系统的输出面分别再现出所有被记录物体清晰的像,来判断全息图的真伪。

利用多重分数傅里叶变换全息图记录和再现条件的这些特殊性,可以制成一种光学安全认证系统,使其与普通多重曝光全息图或单次曝光分数傅里叶变换全息图相比具有更高的安全认证可靠性与防伪力度,能广泛用于钞票、证件、商标的制作中。

## 参 考 文 献

- 1 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9):1875 ~ 1881
- 2 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10):2181 ~ 2186
- 3 H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier optics [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(4):743 ~ 751
- 4 D. Mendlovic, Y. Bitran, R. G. Dorsch *et al.*. Anamorphic fractional Fourier transform, optical implementation and applications [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(32):7451 ~ 7456
- 5 Guo Yongkang, Huang Qizhong, Du Jinglei. Fractional Fourier transform hologram and its application in anti-counterfeiting [J]. *Acta Optica sinica* (光学学报), 1999, **19**(6):821 ~ 825 (in Chinese)
- 6 Zeng Yangsu, Xie Shiwei, Zhang Yixiao *et al.*. Pseudo color coding fractional Fourier transform rainbow hologram [J]. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 2001, **A28**(6):559 ~ 561 (in Chinese)
- 7 Rainer G. Dorsch, Adolf W. Lohmann. Fractional Fourier transform used for a lens design problem [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(20):4111 ~ 4112