第 29 卷　第 7 期
2002 年 7 月
中　国　激　光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol.A29,No.7
July,2002

文章编号:0258-7025(2002)07-0647-05

基于最小截面差的相位展开

康　新,何小元　　C. Quan
(东南大学工程力学系,南京 210096)　　(新加坡国立大学机械工程系,新加坡 119260)

提要　相位展开(PhU)问题从理论上讲是一个不适定问题。根据被测物理量的整体连续性,提出了一种基于最小截面差的相位展开方法。理论分析和对实验条纹图的处理结果表明,该方法特别适合于具有相位间断大于 π,条纹欠采样及随机噪声等条纹图的相位展开。同支切(Branch cuts)法相比,该方法具有算法简单、计算量小且可靠度高的特点,具有一定的实用性。

关键词　相位展开,最小截面差,形貌测量

中图分类号　TN 247　　　**文献标识码**　A

Phase Unwrapping Using the Least Cross-section-difference

KANG Xin[1],HE Xiao-yuan[1],C. Quan[2]

([1] *Department of Engineering Mechanics*,*Southeast University*,*Nanjing* 210096
[2] *Department of Mechanical Engineering*,*National University of Singapore*,*Singapore* 119260)

Abstract　Phase unwrapping is an ill posed problem. A new 2-D phase unwrapping method, based on the global continuity of the physical information, is proposed in this paper. The method, which is derived from the least cross-section-difference of the physical quantity, has shown to produce a reliable result in the presence of error sources, such as noise, phase discontinuity more than π and insufficient sampling, etc. In addition, the algorithm is very simple and fast.

Key words　phase unwrapping, least cross-section-difference, shape measurement

1　引　言

在光测条纹图的数字化自动处理中,相位分析法具有较高的精度和自动化程度,成为目前光测条纹图分析方法的主流,并逐渐取代以往的条纹中心法。相位分析法包括两步:一是相位解调,主要有相移法(时间相移和空间相移)和傅里叶变换法。二是相位展开,因为不论是相移法还是傅里叶变换法得到的相位都是包裹(wrap)在 $-\pi$ 到 $+\pi$(或 0 到 2π)之间的,称为主值,或称为包裹相位。要想提取出包含在相位中的物理信息,必须对包裹相位进行展开(unwrapping),也称解包裹。对于理想的条纹图,相位展开将是一件很容易的事情,只要逐行或逐列扫描即可正确展开相位。然而,实际测量中条纹图总是存在这样或那样的缺陷,如各种噪声(CCD 的光电噪声、散斑等)、无效区域(孔洞、阴影等)、低调制度区域、相位间断点(真实相位突变大于 π)、条纹欠采样或丢失等,这使得相位展开变得非常困难,这也是相位分析法最关键的一步。目前,国内外学者在相位展开方面已做了大量的工作,提出了许多相位展开方法,这些方法可分为两大类:局部展开法[1~7]和全局展开法[8~15]。局部展开法中最具代表性的是支切法,包括稳态婚姻(Stable marriage)算法[4]、最小价格匹配(Minimum-cost-matching)算法[2]、最小生成树(Minimum spanning tree)算法[1]和最近邻居(Nearest neighbor)算法[5,6]等。支切法需要构造分割线(branch cuts or cut lines),由于条纹图的种种缺陷,这种方法往往导致失败,找不到正确的分割

收稿日期:2001-04-19;收到修改稿日期:2001-07-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10072017),非线性力学国家重点实验室开放课题。
作者简介:康新(1967—),女,河北人,东南大学工程力学系博士生。主要从事光测力学及其数字图像分析技术研究工作。
E-mail:mpekangx@nus.edu.sg

线[10,11]。全局展开法中最具代表性的是最小二乘(LS)法[8,9]，此外还有格林恒等式(GF)法[13]，细胞自动机(Cellular-automata)方法[12]和基于马尔可夫随机场的并行算法[15]等。格林恒等式法从理论上和最小二乘法是完全等效的[14]。全局展开法不需要设置路径，而是通过引入适当的约束进行全场迭代，直至满足迭代条件为止。这类方法同样存在一个难解决的问题，就是加权函数不易确定[10]，若加权函数确定不当同样会引起很大的误差。同时，全局展开法计算量大，耗时长，不适于在线检测。

本文根据被测物理量的整体连续性提出一种基于最小截面差的相位展开方法，这种方法同支切法完全不同，它不需要事先检测不相容(inconsistent)点，也不需要构造分割线，而是利用被测物理量的整体连续性对解包裹误差进行纠正，从而得到全场正确的展开相位，实践证明这种方法能够有效消除由较大的真实相位间断及条纹欠采样或丢失等引起的相位展开误差，具有算法简单，计算量小并且可靠性高的特点。

2 最小截面差相位展开方法

2.1 不连续相位的展开

不连续相位一般由被测物理量的突变、条纹过密引起的欠采样或条纹丢失等因素所致。如图1所示，为讨论方便，这里只给出一维情形。设 ϕ 为真实相位，含有突变 a，如图1(a)，ϕ_w 为相应的包裹相位，如图1(b)，则根据包络算子有

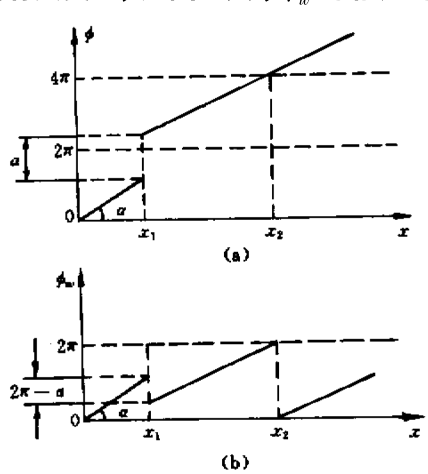

图1 不连续相位的展开

(a) 含有突变 a 的相位；(b) 包裹相位

Fig.1 Unwrapping of the phase with discontinuity

(a) phase with discontinuity a; (b) wrapped phase

$$\frac{\mathrm{d}\phi_w}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} - 2\pi\sum_i \mathrm{sgn}\left[\frac{\mathrm{d}\phi(x_i)}{\mathrm{d}x}\right]\delta(x - x_i) \quad (1)$$

式中，$\delta(x)$ 为狄拉克 delta 函数，$\phi(x_i) = n\pi$，n 为偶数，x_i 可由包裹相位根据阈值(一般取 π)来确定。现在讨论 ϕ_w 的展开。由图1(b)可得

$$\frac{\mathrm{d}\phi_w}{\mathrm{d}x} = b - (2\pi - a)\delta(x - x_1) - 2\pi\delta(x - x_2) \quad (2)$$

式中，$b = \tan\alpha$，当 $a < \pi$ 即 $2\pi - a > \pi$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\phi_w}{\mathrm{d}x} + 2\pi\delta(x - x_1) + 2\pi\delta(x - x_2) = b + a\delta(x - x_1) \quad (3)$$

当 $a > \pi$ 即 $2\pi - a < \pi$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\phi_w}{\mathrm{d}x} + 2\pi\delta(x - x_2) = b - (2\pi - a)\delta(x - x_1) \quad (4)$$

由(3)，(4)式可见，当 $a < \pi$ 时，能正确展开相位，而当 $a > \pi$ 时则在 x_1 处发生 2π 误跳，这种情况是造成解包裹常常失败的主要原因。对于前面提到的大面积无效区域和低调制度区域，可通过设置一个二值模板来处理，解包裹时只要绕开这些区域，一般就能正确解包裹，然而对于上述问题，设置二值模板的方法显然是行不通的。如果用支切法解决上述问题，则又往往会发生正负极点错误配对，造成误差传播。实质上支切法的思想也可以说是寻找一个模板，只不过这些模板是由一些分割线组成。本文根据被测物理量的整体连续性提出利用最小截面差来解决上述问题。

2.2 最小截面差相位展开法

相位展开过程实质上就是 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ 沿 x 的积分过程，如果 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ 在某点出现错误，那么这种误差将会沿积分路径传播，最小截面差法不同于其他一般方法，它不需要事先识别不相容点，而是根据包裹相位 ϕ_w 初步计算 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$，然后积分 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ 得到相位的初步展开结果，最后根据被测物理量的整体连续性(而不是局部连续性)采用最小截面差法对 ϕ 进行纠正。设 ϕ 为初步展开结果，则有

$$\phi_{i,j} = \sum_{l=0}^{j}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_{i,l} \quad (0 \leqslant j \leqslant m, 0 \leqslant i \leqslant n)$$

m，n 分别为图像的宽度和高度。定义对应于一点 (i,j) 的截面差为

$$\Delta S_{i,j} = \sum_{l=j}(\phi_{i,l} - \phi'_{i-1,l}) \quad (5)$$

式中，ϕ' 为真实相位。对于每一点计算

$$\Delta S_{i,j,k} = \sum_{l=j}^{Q}(\phi_{i,l} + k \cdot 2\pi - \phi'_{i-i,l})$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \qquad (6)$$

式中 k 为点(i,j)处的 2π 误跳数，一般取 $0, \pm 1, \pm 2$ 就足够了，Q 为 j 后的且距离 j 最近的相对 2π 误跳点(详见 2.3)。

设 $\Delta S_{i,j,p} = \mathrm{Min}(\Delta S_{i,j,k})$　$(p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，则

$$\phi_{i,j}' = \phi_{i,j} + p \cdot 2\pi \qquad (7)$$

这种算法的最大优点是避免了仅用(i,j)点周围几个相邻点作为跳变的判据，而是采用远离(i,j)点的像素点参与判断，因此能准确地纠正错误的 2π 跳变。这种方法所要求的唯一条件是第一行(或第一列)必须能正确解包裹，这可从(6)式中看出，一般情况下，这一条件是很容易满足的。

2.3　利用双向二阶差分检测 Q

式(6)中 Q 点是相对 2π 误跳点，指前后两点之间存在相对 2π 误跳。有两种情况，一是后面点相对于前面点误跳，二是前面点相对于后面点误跳，一般多是前者发生，若一行中出现多于一个的 Q 点，则可记为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，一般 $n \leqslant 3$。

发生 2π 误跳时，ϕ 沿 x 方向的二阶导数一般都有突变，同时，ϕ 和 ϕ' 沿 x，y 两方向的混合二阶导数一般也都有突变，本文经过多次实践充分证明了这一点。ϕ 沿 x 方向的二阶导数用差分表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\right)_{i,j} = (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j})/2\Delta x \qquad (8)$$

定义 ϕ 和 ϕ' 沿 x，y 方向的混合二阶导数(用差分表示)为

$$\left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi'_{i-1,j+1}}{\Delta y} - \frac{\phi_{i,j} - \phi'_{i-1,j}}{\Delta y}\right)\Big/\Delta x \qquad (9)$$

可记为 $\mathrm{Grad}(\phi,\phi')$，因 $\mathrm{Grad}(\phi,\phi')$ 可能为负值，为检测方便，本文取其绝对值。设定 $\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\right)_{i,j}$ 的阈值为 T_{xx}，$\mathrm{Grad}(\phi,\phi')$ 的阈值为 $T_{x,y}$，则若 $\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}\right)_{i,j} > T_{xx}$ 及 $|\mathrm{Grad}(\phi,\phi')| > T_{x,y}$，则此点为 Q 点。从左到右依次检测出 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，如果一行中没有检测到 Q 点，则取本行的末端点为 Q 点。以上两种二阶导数必须以‘并”的关系联合以构成检测 Q 的条件，因为相位分布的复杂性，实践证明只靠其中之一有时会产生误差。

3　实验条纹图的处理结果

实验测定框图如图 2 所示。

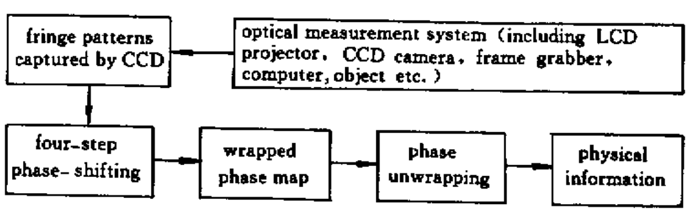

图 2　实验测定框图

Fig.2　Schematic diagram of measurement

本文以测量物体形貌为例，由 LCD 投影仪投影正弦条纹到物体表面上，条纹图受物体高度调制后变形，CCD 拍摄四幅相移量为 $\pi/2$ 的变形条纹图，然后利用相移技术得到包裹位相图，解包裹后可得物体形貌。图 3(a)为一牙模部分形貌图，具有两边高中间低的轮廓。(b)为包裹相位图，图中明显有条纹乱序、噪声及条纹丢失现象(左下角)。(c)是部分不相容点，这些不相容点有的同时出现在同一行上。(d)为沿 x 方向扫描检测到的 2π 跳变点。从图中更清楚地看出有条纹丢失和条纹中断现象。图 4(a)为沿 x 方向扫描进行初步解包裹的结果，由于未检测到大于 π 的真实相位突变以及噪声点的存在而产生了许多拉线，这些拉线即是误差传播途径。图中①行上有两个相对 2π 误跳点，第一次误跳是后面点相对于前面点，第二次误跳是前面点相对于后面点。图 5(a)，(b)两图分别是图 4(a)中标出的①行的 $\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}$ 的分布曲线和 $|\mathrm{Grad}(\phi,\phi')|$ 的分布曲线。从图中可看出，$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $|\mathrm{Grad}(\phi,\phi')|$ 可准确地检测出 Q。图 4(b)为用本文方法得到的最后展开相位，图中拉线全部消失。图 6(a)，(b)分别为图 4(a)中②行的纠正前和纠正后的相位分布。

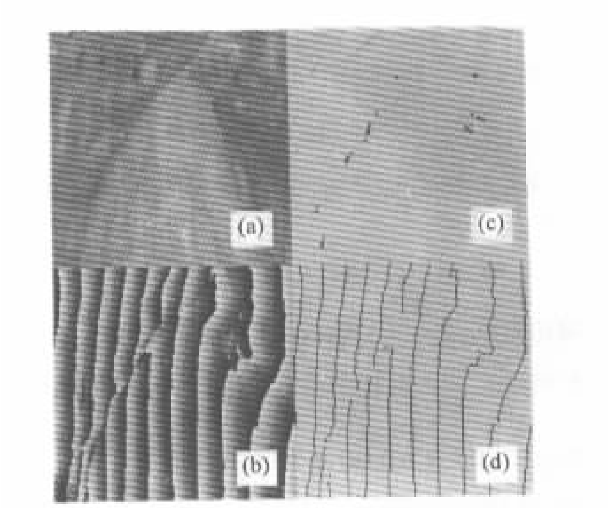

图3
(a) 一牙模的部分形貌；(b) 包裹相位图；
(c) 部分不相容点；(d) 2π 跳变点

Fig.3
(a) part profile of a teeth model;
(b) wrapped phase map from phase-shifting method;
(c) part of the inconsistent points;
(d) 2π phase jumping points

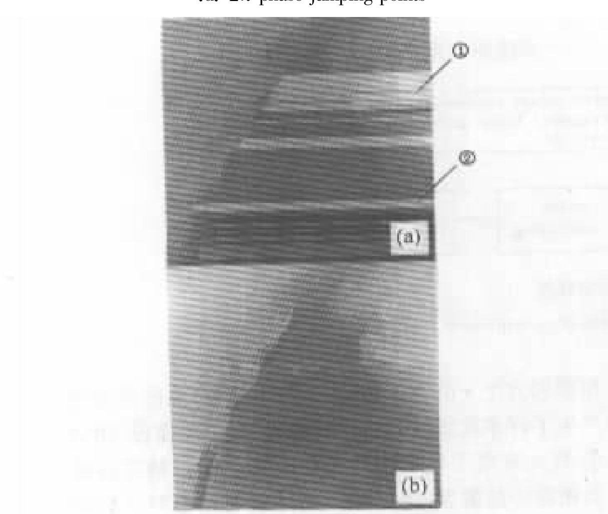

图4 处理结果
(a) 含有 2π 误跳的展开相位；
(b) 用本文方法纠正后的展开相位

Fig.4 Process results
(a) unwrapped phase with error 2π phase jumping;
(b) unwrapped phase after correction

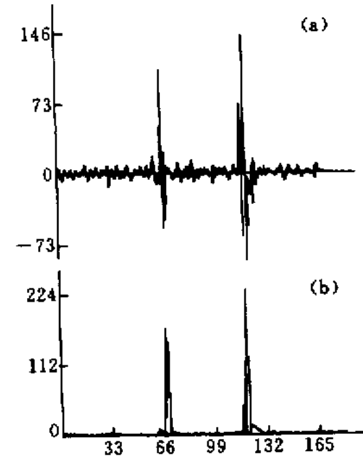

图5 相对误跳点的检测
(a) ϕ 沿 x 方向的二阶差分；
(b) ϕ 和 ϕ' 的混合二阶差分的绝对值

Fig.5 Relatively error 2π phase jumping points
(a) second-differential of ϕ in x direction;
(b) mixed second-differential of ϕ and ϕ'

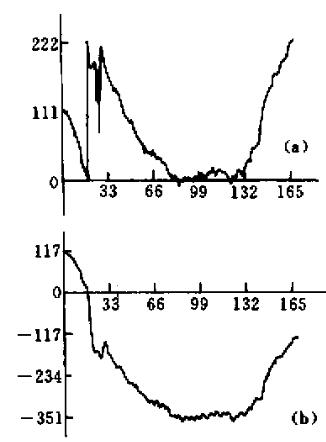

图6 ②截面的相位分布
(a) 含有 2π 误跳；(b) 用本文方法纠正后

Fig.6 Phase distribution of cross ②
(a) in the presence of error 2π phase jumping;
(b) after correction

值得一提的是，在 Q 点附近，由于包裹相位值 ϕ_w 本身往往是不正确的，因此可能会导致 Q 附近个别点的 2π 误跳，如图4(b)中的小亮点。但由于最小截面差方法不是依靠周围几个点来纠正误差的，因此这种误差不会传播。

4 结 论

对实验条纹图的处理结果表明，本文根据被测物理量的整体连续性提出的基于最小截面差的相位展开法能有效地消除 2π 误跳，抑制误差传播，对一行中同时存在若干相对误跳点的情况也能正确处理。同支切法相比，本文方法算法简单，运算量小且可靠性高，是一种比较实用的空间相位展开方法。

参 考 文 献

1 N. H. Ching, D. Rosenfeld, M. Braum. Two-dimensional phase unwrapping algorithm using a minimum spanning tree algorithm [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 1992, **1**(3): 355～365

2 J. R. Buckland, J. M. Huntley, S. R. E. Turner. Unwrapping noisy phase maps by use of a minimum-cost-matching algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(23): 5100～5108

3 A. Collaro, G. Franceschetti, F. Palmieri *et al*.. Phase unwrapping by means of genetic algorithm [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(2): 407～418

4 J. A. Quiroga, A. Gonzalez-Cano, E. Bernabeu. Stable-marriages algorithm for preprocessing phase maps with discontinuity sources [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(23): 5029～5038

5 J. M. Huntly. Noise-immune phase unwrapping algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(15): 3268～3271

6 R. Cusack, J. M. Huntley, H. T. Goldrein. Improved noise-immune phase-unwrapping algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(5): 781～789

7 Peng Xiang, Zhu SHaoming, Ye Shenghua. Phase decoding of interferogram with Random noise and segmented-discontinuity [J]. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(4): 352～358 (in Chinese)

8 M. D. Pritt, J. S. Shioman. Least-squares two-dimensional phase unwrapping using FFT′s [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1994, **32**(3): 706～708

9 D. C. Ghiglia, L. A. Romero. Robust two-dimensional weighted and unweighted phase unwrapping that uses fast transforms and iterative methods [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(1): 107～117

10 G. Fornaro, G. Franceschetti, R. Lanari *et al*.. Global and local phase-unwrapping techniques: a comparison [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10): 2702～2708

11 O. Marklund. Noise-insensitive two-dimensional phase unwrapping method [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(1): 42～60

12 M. Servin, R. Rodriguez-vera, A. J. Moore. A robust cellular processor for phase unwrapping [J]. *J. Modern Opt.*, 1994, **41**(1): 119～127

13 G. Fornaro, G. Franceschetti, R. Lanari. Interferometric SAR phase unwrapping using Green′s formulation [J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 1996, **34**(3): 720～727

14 G. Fornaro, G. Franceschetti, R. Lanari *et al*.. Robust phase-unwrapping techniques: a comparison [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(12): 2355～2366

15 J. L. Marroquim, M. Tapia, R. Rodriguez-Vera *et al*.. Parallel algorithm for phase unwrapping based on Markov random fields models [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(12): 2578～2585