

文章编号: 0258-7025(2002)07-0595-05

声光效应拉曼-内斯方程矩阵级数解法及 声光调制器优化设计

黎永航, 蔡 懿, 郑国梁, 林旭斌, 余卫龙*

(中山大学超快速激光光谱学国家重点实验室和中山大学物理系, 广州 510275)

提要 提出一种求解正常声光相互作用拉曼-内斯(Raman-Nath)方程的矩阵级数解法, 该解法直观方便且具有普遍性。计算结果表明, 对 $Q = 4.1\pi$, Bragg 衍射的效率只有 97.5%; 对非对称入射, 以往的 Raman-Nath 近似解误差较大, 指出提高 Bragg 衍射效率的有效途径在于提高声光频率比并给出计算声光器件最优长度的计算公式。

关键词 声光效应, 衍射效率, 拉曼-内斯方程, 矩阵级数解法

中图分类号 O 151.21; TN 76 文献标识码 A

Matrix Series Method of the Raman-Nath Equation of Ultrasonic Light Diffraction and Its Application to the Optimum Design of Acousto-optics Modulator

LI Yong-hang, CAI Yi, ZHENG Guo-liang, LIN Xu-bin, SHE Wei-long

(State Key Laboratory of Ultrafast Laser Spectroscopy and Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract A universal and convenient matrix series method to solve the Raman-Nath equation of normal ultrasonic light diffraction is presented. The results show that the diffraction efficiency for Bragg approach is only 97.5% at $Q = 4.1\pi$, and that for asymmetry incidence, there is large error in previous Raman-Nath approach. The formula of the optimum length of the acousto-optics modulator is given. Increasing the ratio of acoustical frequency to optical frequency is a effective way to improve the diffraction efficiency.

Key words ultrasonic light diffraction, diffraction efficiency, Raman-Nath equation, matrix series method

1 引 言

声光效应在很多方面都有重要的应用。例如, 它可用于激光束偏转^[1,2]、激光显示^[3,4]、激光记录^[3,4]、激光打印^[3]、激光器主动锁模、腔倒空^[1,4]、激光排版^[4]、光信号处理如实时傅里叶光谱分析^[1,5]以及激光频率调制^[1,3]等等。但是, 作为应用基础的声光耦合波动方程——拉曼-内斯(Raman-Nath)方程^[6], 其求解是非常困难的, 因为在一般情况下, 它不存在解析解而只能在一定条件下求出其近似解, 所以, Raman-Nath 方程存在多种解法。Klein 和 Cook 的工作^[7]有极大的代表性, 他们给出了 Raman-Nath 衍射和 Bragg 衍射的近似解析解, 又给出

了其他几种情况下的数值解。由数值解, 他们给出了 Bragg 衍射的条件。文献[8]由此条件引出声光调制器的特征长度概念。这些研究结果长期以来被广泛引用并被当作声光器件设计的理论依据。但是, 我们发现已有工作仍存在着一些问题。首先, 虽然 Raman-Nath 近似能给出各级的解, 但其解法不甚合理, 因为它在位相失配项中丢掉一个级序参数但又保留了与角度有关的参数 α 。这样, 随着 α 的增大, 结果误差会变得越来越大。其次, 对 Bragg 近似解析解, 由于在近似过程中丢掉一些级序, 得出了衍射一级光效率为 1, 存在着一定的误差。第三, 由 Bragg 衍射的条件引出的声光器件特征长度的概念是无意义的, 它会对应用者产生误导。此外, 以往用

收稿日期 2001-04-23; 收到修改稿日期 2001-07-30

基金项目 广东省自然科学基金资助课题(批准号 980359)

* 通信联系人。

于数值计算的差分方法应用起来也不甚方便。众所周知,声光器件几乎具有电光器件所具有的功能,且一个声光器件又能起到多种功能的作用,这是电光器件所望尘莫及的。随着光电子技术的发展,声光器件的应用将会越来越广泛,所以,寻找一种求解 Raman-Nath 方程的方便方法将是有意义的。本文提出一种矩阵级数解法,该解法直观方便且具有普遍性。我们用这种方法,借助计算机对 Raman-Nath 方程进行求解,再与以往的工作相比较,发现对 $Q = 4.1\pi$, Bragg 衍射的效率只有 97.5%; 对非对称入射,以往的 Raman-Nath 近似解误差较大; 本文还指出以往文献提出的声光器件特征长度概念的不合理性,指出提高 Bragg 衍射效率的有效途径在于提高声光频率比并给出计算声光器件最优长度的计算公式。这些结果,可供声光器件的设计者参考。

2 矩阵级数解法

正常声光相互作用遵从如下 Raman-Nath 方程

$$\frac{d}{dx}E_m(x) = C[E_{m-1}(x) - E_{m+1}(x)] + j \cdot D \cdot m(m - 2\alpha)E_m(x) \quad (1)$$

其中 $C = -\frac{\kappa_0 \Delta n}{2\cos\theta_i} = -\frac{\pi \Delta n}{\lambda_0 \cos\theta_i} \quad (2)$

$$D = \frac{K^2}{2n\kappa_0 \cos\theta_i} = \frac{\pi \lambda_0}{n\Lambda^2 \cos\theta_i} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{K} \sin\theta_i = \frac{n\Lambda}{\lambda_0} \sin\theta_i \quad (4)$$

令 $V_m(x) = E_m(x) / E_0(0) \quad (5)$

$$y = Cx = -\frac{\kappa_0 \Delta nx}{2\cos\theta_i} = -\frac{\pi \Delta nx}{\lambda_0 \cos\theta_i} \quad (6)$$

$$G = D/C = -\frac{K^2}{n\kappa_0^2 \Delta n} = -\frac{\lambda_0^2}{n\Lambda^2 \Delta n} \quad (7)$$

则上方程可化为

$$\frac{d}{dy}V_m(y) = V_{m-1}(y) - V_{m+1}(y) + j \cdot G \cdot m(m - 2\alpha)V_m(y) \quad (8)$$

式中, n 为本底折射率, Δn 为声致折射变化, κ_0 为光真空中波数, κ 为光在介质中波数 ($\kappa = n\kappa_0$), λ 为光在真空中的波长, K 为声波波数, Λ 为声波波长, θ_i 为入射角, $j = \sqrt{-1}$ 。 $y(x)$ 为相移随 x 的变化函数,反映了声波对光波位相的影响随 x 的变化。为与解析解法相比较,设 $\xi = 2LC$, 其中 L 为换能器长度,由此可得 $y = \xi x / 2L$ 。下面的讨论中,均取 $x = L$ 这样可得到各级衍射光的衍射效率,因此,下面均有 $y = \xi / 2$ 。 V, α, G, y, ξ 均为无量纲量。方程组 (8) 是一个无穷方程组,在一般情况下,它无解析解。Klein 和 Cook 在文献 [7] 中对两种特殊情况下求出近似解析解,对其他一些情况则用差分方法求出数值解。应该指出,其数值解也不是完整的。我们在这里提出一种矩阵级数解法。矩阵级数解法基于如下物理考虑: 一个实际的声光效应过程,可观察的衍射光级序是有限的,即较高级的级序可忽略不计。这样,就可将无穷方程 (8) 截断,使其变成一个有限一阶常微分方程

$$\frac{dV}{dy} = AV \quad (9)$$

其系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{-m} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{-2} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a_{-1} & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & a_0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & a_1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & a_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

而 $V = [V_{-m}(y) \cdot \cdot \cdot V_{-2}(y) \ V_{-1}(y) \ V_0(y) \ V_1(y) \ V_2(y) \cdot \cdot \cdot V_m(y)]^T \quad (11)$

A 是一常数矩阵,其中 $a_m = j \cdot G \cdot m(m - 2\alpha)$,根据常微分方程理论^[9],方程组(9)有矩阵级数解

$$V = e^{Ay}V_0 = \left(I + Ay + \frac{1}{2!}A^2y^2 + \frac{1}{3!}A^3y^3 + \dots \right) V_0 \quad (12)$$

其中 I 为单位矩阵, V_0 为边界条件矩阵,选 $V_0 = (\dots 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots)^T$,这里 T 表示矩阵转置,其中矩阵元 1 对应零级序。这样选择边界条件后,各级衍射光的衍射效率 $\eta_m = |V_m(y)|^2$ 。

3 数值结果及讨论

这里提出的矩阵级数解法具有通用性,它能求出显异于零的各级衍射光的解。可看出,矩阵级数解法由三参数 α , G 和 y 决定。对于一定的实验条件,三参数确定,也就对应了确定的解。三参数由其对应表达式里的物理参数决定,而对任意一组确定的物理参数都能给出确定的解。它能给出所有显异于零的级,包括那些看起来影响不大的级,不需要为了方便求解而舍弃高阶衍射级。因此,矩阵级数解法具有很大的适用性。

矩阵级数解法可利用计算机求解,它能达到很好的近似程度。应用求解程序解方程时还可以根据需要确定系数矩阵的阶数,求出所需的任意级的解。只是矩阵越大,对计算机硬件的要求也越高。不过,目前流行的 PC 机都能满足一般求解的需要。与以往的解法相比,矩阵级数解法有其明显的优点。以往的解法由四参数 α , Q , ξ 和 x 决定。与矩阵级数解法的三参数一样, α , Q 和 ξ 都是无量纲量。但 x 和方程(1)的系数都是有量纲的。参数取值时也要考虑到相应的量纲。以往的数值解法直接对方程(1)求解,而将求解结果作为选择解析解法近似条件的依据,这样就会出现一些问题,将在下面讨论。而 Raman-Nath 方程经变换为方程(2)后,系数变为无量纲的量,把物理模型完全转化为纯数求解,这样,既能达到减少参数的目的,又可避免直接求解方程(1)带来的一些问题。另外,对应确定的四参数的值,以往的解法是^[7]:当 Q 很小时(满足 Raman-Nath 条件 $Q \leq 0.3$),作 Raman-Nath 衍射近似,此时能得出各级衍射光的衍射效率,但其解在斜入射时高级序误差较大,因为它在位相失配项 $j \frac{mQ}{2L} (m - 2\alpha) \varphi_m$ 的括号中丢掉级序参数 m 但又保留与角度参数有关的

α 。当 Q 很大时(满足 Bragg 条件 $Q \geq 4\pi$),作 Bragg 衍射近似,此时忽略了二级及以上各级,故只能给出零级和一级的解。如果都不满足上述两种条件(即 Q 不大也不小),则不能给出解析解,方程只能通过其他方法给出数值解。

矩阵级数解法的参数 G 与以往解法的参数 Q 关系为: $G = Q/\xi$ 。以往解法以 Q 为参数作为衍射类型的判据,矩阵级数解法则以 G 表征一级衍射最大效率的发展趋势。 G 的表达式中不含器件长度参数 L 。 G 与光声波长比的平方成正比,又与折射率改变绝对值的幅值成反比。容易改变实验条件以改变参数 G 的值。作为应用的例子,下面我们将给出一些用矩阵级数解法算出的结果并与以往的结果进行比较。我们同时列出对应的 G , Q 值以作对比。

表 1 给出了几个典型 α 值下 Raman-Nath 衍射解析解和矩阵解法的计算结果。可见,对 Raman-Nath 衍射,解析解和矩阵级数解法均能给出各级衍射效率,但解析解永远关于零级对称,且随着级序和入射角(更确切地说,随 α)的增大,解析解的误差增大(表 1 的相对误差为矩阵解法的结果与解析解之差对矩阵解法的结果的比值的绝对值)。由(4)式,我们知道对低声频的声光效应, α 可以取很大的值。注意我们用以计算的参数 $\xi = 6$ 和 $Q = 0.22434$ 完全满足文献 7 给出的 Raman-Nath 近似条件,所以, Raman-Nath 解析解不能很好地描写物理实在,而矩阵级数解法则能全面反映入射角对效率分布的影响。

对 Bragg 衍射,解析解因为仅考虑零级和一级衍射光而忽略其他各级衍射光的影响,由此得出在 Bragg 入射角时(即 $\alpha = 0.5$),一级光的衍射效率为 1。矩阵级数解法考虑到所有显异于零级序衍射光的影响,因而一级效率不可能为 1。例如,当 $G = 4.1$, $\xi = \pi$, $\alpha = 0.5$ 矩阵级数解法得到的一级光的衍射效率虽然也达到最大值,但只有 0.975。图 1 反映了一级光最大衍射效率和 G 值及相应的 ξ 值的关系, Q 值曲线也画上以作比较。其中 ξ 和 Q 的单位为 π ,但 Q 的值按 1/2 的比例作出。由此看出,虽然 Q 随 G 单调递增,但 G 增大(Q 增大), η 并非随 Q 作单调递增, η - G 曲线呈起伏状,在 G 较小时也可能获得较高的效率(很明显, $G = 0.5$ 时, η 有极大值 0.825,比 $G = 1$ 时 $\eta = 0.722$ 大得多)。因此, Q 不能成为效率高低的判据。应该指出,对小的 G , η 的最大值并不在 $\xi = \pi$ 处。当 $G \geq 2$ 时, η 的最大值才约在 $\xi = \pi$ 处。

表1 解析解与矩阵级数解在不同α值下的比较

Table 1 Comparison of the two results at different α

$G = 0.03739 \quad \xi = 6 \quad (Q = 0.22434)$

Order	$\alpha = 0$			$\alpha = 10$			$\alpha = 20$		
	Analytical solution	Numerical solution	Relative error/%	Analytical solution	Numerical solution	Relative error/%	Analytical solution	Numerical solution	Relative error/%
6	0.06044	0.05384	12.30	0.01273	3.28×10^{-3}	286.96	2.42×10^{-6}	4.22×10^{-8}	5628.88
5	0.13111	0.12867	1.90	0.05627	0.02442	130.43	7.53×10^{-5}	3.84×10^{-6}	1863.11
4	0.12791	0.13451	4.91	0.14397	0.1064	35.31	1.59×10^{-3}	2.18×10^{-4}	631.92
3	0.01317	0.01674	21.30	0.15423	0.18137	14.96	0.02073	6.82×10^{-3}	204.00
2	0.05899	0.05946	0.79	0.01201	0.03809	68.47	0.1391	0.09258	50.25
1	0.07655	0.07908	3.20	0.09107	0.07834	16.25	0.32387	0.33111	2.19
0	0.02269	0.02425	6.43	0.05514	0.05829	5.40	0.02926	0.03204	8.68
-1	0.07655	0.07908	3.20	0.09107	0.10168	10.43	0.32387	0.299	8.32
-2	0.05899	0.05946	0.79	0.01201	2.94×10^{-3}	308.60	0.1391	0.1796	22.55
-3	0.01317	0.01674	21.30	0.15423	0.11815	30.54	0.02073	0.04871	57.44
-4	0.12791	0.13451	4.91	0.14397	0.15905	9.48	1.59×10^{-3}	8.62×10^{-3}	81.52
-5	0.13111	0.12867	1.90	0.05627	0.08949	37.12	7.53×10^{-5}	1.16×10^{-3}	93.51
-6	0.06044	0.05384	12.30	0.01273	0.03012	57.74	2.42×10^{-6}	1.28×10^{-4}	98.11

文献 8 中,由 Bragg 衍射条件 $Q \geq 4\pi$ 引入器件特征长度的概念,特征长度定义为

$$L_0 = \frac{\Delta^2}{\lambda} = \frac{n\Lambda^2}{\lambda_0}$$

再把 Bragg 衍射条件表述为 $L \geq 2L_0$,用以指导声光器件的设计会对设计者产生误导。由图 1 曲线可得, $G \geq 2$ 时,效率的最大值约在 $\xi = \pi$ 处。更一般地,效率的最大值约在 $\xi = (2l + 1)\pi$ 处(见图 2),这里 $l = 0, 1, 2, \dots$ 。但因 $l > 0$ 时,如图 2 所示,一级光衍射效率不再随 ξ 作单调变化,故在实际应用中,一般取一级光最大衍射效率对应 $\xi = \pi$ 。令 $|\Delta n|_{\max}$ 表示折射率改变量绝对值的幅值,这时,器件的最优长度由下式决定

$$\frac{2\pi |\Delta n|_{\max} L}{\lambda_0 \cos \theta_i} = \pi$$

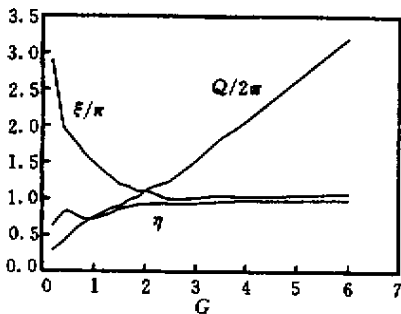


图 1 一级衍射光最大效率与相应 G, ξ 的关系曲线

Fig.1 Max diffraction efficiency of the first order versus the corresponding G and ξ

可得

$$L = \frac{\lambda_0 \cos \theta_i}{2 |\Delta n|_{\max}} \approx \frac{\lambda_0}{2 |\Delta n|_{\max}}$$

可见,一旦光波波长(或频率)确定, L 的最优值已由此式确定。最优长度依赖于光波长和 $|\Delta n|_{\max}$ 而不依赖于声波的波长,它不是一个可任选的独立参数。对给定的 λ_0 和声波功率上限,选择声光品质因数高的材料,可获得大的 $|\Delta n|_{\max}$,将器件做得尽可能地短。反过来,增长 L ,目的在于用尽可能低的驱动功率。但驱动功率的最大值必须使得 $|\Delta n|_{\max}$ 满足上式。所以特征长度 L_0 的引入毫无意义,要提高衍射效率,不能通过加长器件来达到,更大但不合适的 L 值都只能导致效率降低。由图 1 看到,当 $G \geq 1.8$ 时, G 越大,一级光衍射效率越高。注意 G 的表达式,我们知道,如果声波的频率已确定,就尽可能地选低频的光波,如果光波长已确定,可通过加大声波频率来达到。这两种方法,目的都是提高声光频率比,但从(6)式知道用大 λ_0 不利于用低的驱动功率获得大的调制幅度,所以,对低功率运转的器件,提高声频更有利。再注意 G 的表达式,它也含有 $|\Delta n|$,最小 G 值(G_{\min})对应 $|\Delta n|_{\max}$ 。如将声光器件用于模拟信号的调制,则是通过改变超声的功率从而改变 Δn 。 $|\Delta n|$ 与声波功率 P 有关系 $|\Delta n|^2 \propto P^{[8]}$, $|\Delta n|$ 变小时 G 要增大。

图 3 给出了几个 G_{\min} 下一级衍射光效率随 $(|\Delta n|/|\Delta n|_{\max})$ 的变化规律。其中 $G_{\min} = 0.5, 1,$

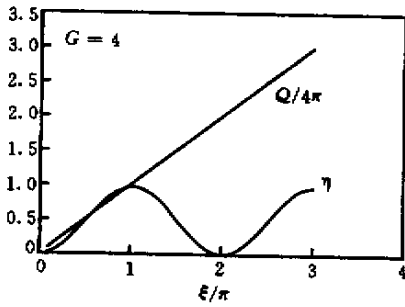


图 2 一级衍射光效率随 ξ 而变化 ($G = 4$)

Fig. 2 Diffraction efficiency of the first order versus ξ ($G = 4$)

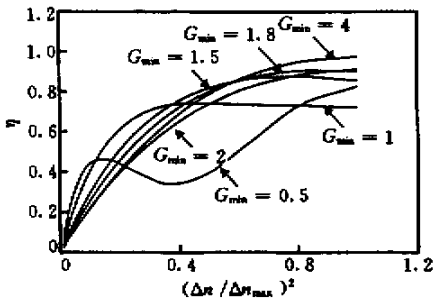


图 3 一级衍射光效率随 $(|\Delta n|/|\Delta n|_{\max})^2$ 的变化规律

Fig. 3 Diffraction efficiency of the first order versus $(|\Delta n|/|\Delta n|_{\max})^2$

1.5, 1.8, 2 和 4 分别对应最大的 ξ 值 $\xi_{\max} = 1.9\pi, 1.5\pi, 1.2\pi, 1.1\pi, \pi$ 和 π 。由图 3 看出, 当 $G_{\min} \geq 1.8$ 时, 一级光衍射效率随 $(|\Delta n|/|\Delta n|_{\max})^2$ (即驱动功率) 的增大而增大。所以, 设计器件时应同时照顾到最优的 L 和 G_{\min} 。应该先选尽可能短的光波波长, 由最大声波功率 P 和材料声光品质因数确定 $|\Delta n|_{\max}$, 从而确定最优的器件长度 L , 再由所需的衍射效率确定 G_{\min} (乘上 π 即 Q), 最后确定声频。应该指出的是, 我们不能盲目追求高的 G_{\min} (或 Q) 值, 因为高频声光器件的成本比低频的要昂贵得多, 如果不需要很高的衍射效率且不要求有线性的调制, 如前所述, 选用 $G = 0.5$, 也可获得 85% 的最大衍射效率。而 $G_{\min} = 2.5$ ($Q = 2.5\pi$) 时, 最大衍射效率已达 0.94。如果将图 1 用于振幅调制器件的设计, 应将图中的 G 看成为 G_{\min} 。从线性调制的角度看, $G_{\min} = 1$ 比大的 G_{\min} 更优, 因为其线性调制区的频率更高。

最后指出, 文献 [7] 给出的数值计算差分方法, 在实际应用中不如本文提出的矩阵级数方法方便易用。本文提出的方法, 极易用现有的计算机软件, 如

Mathcad7 实现, 所以有明显的优点。但有一点必须提及, 在应用矩阵级数解法时, 必须用 $\sum \eta_m = 1$ 作为收敛判据, 选定系数矩阵的阶数。一般对大一点的 G 值, 矩阵的阶数可选为 5 或 3, 而对小一点的 G 值, 阶数可适当增大。另外, 当 G 和 y 较小时, 矩阵级数收敛较快, 我们还能直接写出各级衍射光光场复振幅的级数解解析表达式。

4 结 论

求解正常声光相互作用 Raman-Nath 方程的矩阵级数解法直观方便且具有普遍性。用本方法计算结果表明, 对 $Q = 4.1\pi$, Bragg 衍射的效率只有 97.5%; 对非对称入射, 以往的 Raman-Nath 近似解误差较大。本文还指出以往文献提出的声光器件特征长度概念的不合理性, 提出了提高一级衍射效率的有效途径及声光器件最优长度设计公式。这对声光器件的设计具有重要的指导意义。

参 考 文 献

1. I. C. Chang. Acousto-optic devices and applications [J]. *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1976, **SU23** (1) : 2 ~ 22
2. L. D. Dickson. Optical considerations for an acousto-optic deflector [J]. *Appl. Opt.*, 1972, **11** (10) : 2196 ~ 2202
3. J. P. Xu. The Principle Design and Application of Acousto-optics Devices [M]. Beijing : Science Press, 1982, Chap. 7 (in Chinese)
4. D. Maydan. Micromachining and image recording on thin films by laser beams [J]. *Bell Sys. Tech. J.*, 1971, **50** (6) : 1761 ~ 1789
5. D. L. Hecht. Spectrum analysis using acousto-optic devices [C]. *SPIE*, 1976, **90** : 148 ~ 157
6. C. V. Raman, N. S. N. Nath. The diffraction of light by high frequency sound waves [C]. *Proc. Indian Acad. Sci.*, Part I, 1935, **2** : 406 ~ 412; Part II, 1935, **2** : 416 ~ 420; Part III, 1936, **3** : 75 ~ 84, 1936; Part IV, 1936, **3** : 119 ~ 125; Part V, 1936, **3** : 459 ~ 465; Generalized theory, 1936, **4** : 222 ~ 242
7. W. R. Klein, Bill. D. Cook. Unified approach to ultrasonic light diffraction [J]. *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, 1967, **SU14** (3) : 123 ~ 134
8. J. P. Xu. The principle design and application of acousto-optics devices [J]. *Journal of Beijing Polytechnic University* (北京工业大学学报), 1978, (2) : 50 ~ 78 (in Chinese)
9. B. L. You. Additional Course of Ordinary Differential Equations [M]. Beijing : People's Education Press, 1981, Chap. 2