

文章编号: 0258-7025(2002)06-0517-04

夏克-哈特曼传感器任意形状孔径波前的 模式重构及 Zernike 多项式描述

段海峰, 杨泽平, 王淑青, 张雨东

(中国科学院光电技术研究所, 四川成都 610209)

提要 根据高等代数内积和欧氏空间的概念及线性无关向量正交化方法, 提出了在任意形状区域上, 利用 Zernike 多项式在给定区域的正交化方法, 通过线性变换生成一组新的正交多项式, 实现在任意区域哈特曼-夏克波前传感器的相位模式重构的方法, 并通过线性反变换, 实现任意区域的波前相位的 Zernike 多项式表示。

关键词 SH 波前传感器 模式重构 Zernike 多项式

中图分类号 TP 202+.7 文献标识码 A

Model Wavefront Reconstruction of Shack-Hartmann Sensor on Arbitrary Area and Wavefront Expression by Zernike Polynomials

DUAN Hai-feng, YANG Ze-ping, WANG Shu-qing, ZHANG Yu-dong

(Institute of Optics & Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

Abstract In this paper, based on the conception of cross-product and space in the superior algebra theory, using the Zernike polynomial and the orthogonalization method, a method of Shack-Hartmann Sensor's model wavefront reconstruction on arbitrary area is proposed through linear transform. Through linear reverse transform, the wavefront can be expressed by Zernike polynomial easily.

Key words SH wavefront sensor, modal wavefront reconstruction, Zernike polynomial

Shack-Hartmann(SH)波前传感器已被广泛用于自适应光学系统^[1], 它可以用很高的采样频率同时测量出光场的相位分布和强度分布, 而且还可以事先用一束高质量的参考光标定, 从而在现场测量时无需参考光, 对环境的要求不象干涉仪那样敏感。因此, SH 波前传感器已成功用于激光光束质量诊断、光学元件和光学系统检测、大气扰动测量等诸多领域^[2~4]。

SH 测量的是波前相位斜率, 需要经过波前复原求出相位值。复原的方法主要有区域法^[5]和模式法两类^[6]。区域法是利用子孔径四邻位置的测量数据估计中心点相位, 适用于圆域和非圆域的波前重建^[7]; 模式法是将全孔径的波前相位展成不同的正交模式, 然后用全孔径的测量数据计算各模式系数, 得到完整的波前展开式, 从而求得波前相位。

由于模式法中 Zernike 多项式的圆域正交性, 并且其各阶模式与光学设计中的 Sedel 像差(如: 离焦、像散、彗差等)系数相对应, 因此在圆瞳孔径上常用其作为正交基进行波前重构。

对于非圆瞳光学系统, 例如第 3 代 ICF 装置激光光束为方形, 许多大型望远镜的光瞳孔径为环形。在这些非圆瞳光学系统中使用 SH 波前传感器测量相位分布时, 由于 Zernike 多项式的非正交性, 因此不能再用它作为正交基进行波前模式重构, 而需选用其他正交多项式。例如, 针对环形孔采用 Zernike-Tatjar^[8]、Zernike-Mahajan^[9]多项式, 针对方形孔采用 Legendre^[10]多项式。文献[11]为了用 Zernike 多项式直观表示被测光学系统的波前相位, 针对方形孔首先采用 Legendre 多项式进行模式重构, 然后将重构模式系数通过线性变换, 计算出

收稿日期 2001-03-21; 收到修改稿日期 2001-06-25

作者简介: 段海峰(1969—), 男, 博士研究生, 主要从事自适应光学技术研究。E-mail: dengheyong@163.net

Zernike 多项式系数,从而实现了方孔径波前像差的 Zernike 多项式描述。

但是上述多项式只能针对某种特定形状的孔径,缺少通用性,无法实现任意形状孔径的光束波前模式重建。本文在研究应用于 ICF 系统方孔径激光光束近场位相测量的 SH 传感器波前模式重构中,应用线性代数理论,根据 Zernike 多项式在非圆域上 Gram 矩阵的性质选择其阶项,使其彼此线性无关,然后通过 Gram 矩阵的正交分解或 Gram-Schmidt 正交化方法,构造一组正交基矢量,从而实现方孔径的 SH 波前模式重构。而且应用这一方法,还可实现任意形状孔径上的光束波前模式重建及 Zernike 多项式描述。

1 波前模式重构的数学基础——Gram 矩阵和正交向量基

根据高等代数理论^[12]线性空间是三维几何空间的抽象,对线性空间域 R 上任意两个实变实值函数 f, g , 关系式

$$(f, g) = \int_R f(r)g(r) d\bar{r} \quad (1)$$

是空间域 R 上的内积。带有内积 (f, g) 的 R 构成无限维欧氏空间,并称 f, g 为欧氏空间的向量。对于欧氏空间的 n 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n , 其 Gram 矩阵定义为

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 线性无关的充要条件是其 Gram 矩阵是正定阵。

对于 Gram 矩阵的正交分解方法,由于 Gram 矩阵是实对称正定矩阵,则必存在酉阵 Q , 使

$$Q'GQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (3)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 G 的特征值, Q 为 G 的特征向量且满足 $Q' = Q^{-1}$, 作线性变换

$$B = Q'A \quad (4)$$

其中 $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, Q' 为两向量的线性转换矩阵。由向量 B 的 Gram 矩阵可知

$$G(B) = \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, b_n) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, b_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_n, b_1) & (b_n, b_2) & \dots & (b_n, b_n) \end{pmatrix} = Q' \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (5)$$

由广义 Hadamard 不等式定理可知, B 为欧氏空间的一组正交向量。因此,欧氏空间的向量 φ 以 B 为正交向量基可实现正交分解。

2 圆域 Zernike 波前模式重构

在单位圆 $R(r \leq 1)$ 上,由 Zernike 多项式性质可知, Zernike 多项式 Z_1, Z_2, \dots, Z_n 彼此正交,单位圆上的像差可由(6)式唯一表示

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_q a_q Z_q(\rho, \theta) + \varepsilon \quad (6)$$

其中 ε 为残差项。圆域 S-H 传感器模式法重构波前的算法表述为^[6]

$$\vec{S} = D\vec{A} \quad (7)$$

$$\vec{A} = D^+ \vec{S} \quad (8)$$

其中, \vec{S} 为 $2m \times 1$ 维 S-H 传感器子孔径斜率值, \vec{A} 为 $n \times 1$ 维待定 Zernike 模式系数向量, D 为 $2m \times n$ 维重构矩阵, m 为 S-H 子孔径数, n 为波前重构模式函数的项数。

3 非圆域波前模式重构

为既便于分析,又不失一般性,非圆域区域定义在单位圆的内接区域,即

$$R(\text{Max}(r) \leq 1) \quad (9)$$

选取 n 项 Zernike 多项式作为非圆域的一组向量,根据(1)(2)式,计算出这组向量的 Gram 矩阵,并分析它们的线性相关性。若这 n 个向量线性相关,则可从这组向量中选取 m 个向量构成一个新的向量组 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)^T$,使它们彼此线性无关,再根据(3)(4)式对新向量组 Z 作正交化处理,从而得到一组在给定区域上正交的向量组 $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$,且 B 满足

$$B = Q'Z \quad (10)$$

其中, Q' 为由向量组 Z 的 Gram 矩阵确定的线性变

换矩阵。

根据(7)(8)式的重构方法,以向量 B 作为正交基矢量进行波前模式重构,得到重构系数向量 $A_B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,由(10)式,可计算出非圆域波前 Zernike 模式展开系数 A_Z ,实现非圆域 Zernike 模式波前描述

$$A_Z = QA_B \quad (11)$$

4 仿真结果

本文采用文献[13]的 Zernike 多项式计算公式,选取的重构区域为方形和环形,通过对前 44 阶 Zernike 多项式在(9)式定义的区域(方形域 $R(|x| \leq \sqrt{2}/2) \cap (|y| \leq \sqrt{2}/2)$ 环域 $R(0.4 \leq r \leq 1)$)Gram 矩阵的分析,得出这 44 项 Zernike 多项式向量在方形域和环域线性无关。根据(1)~(10)所述的正交和重构方法,生成正交向量组,实现波前重建。并根据(11)式,完成非圆域波前像差的 Zernike 模式描述。

在仿真过程中,我们选取的 SH 传感器的子孔径数为 10×10 ,选取前 35 阶 Zernike 多项式作为波前像差的模式重构向量。首先根据夫琅和费衍射理论,仿真生成带有各种波前像差的光束在 SH 传感器上形成的 CCD 光斑点阵,采用质心法计算 SH 各子孔径的斜率,依式(7)~(11),根据子孔径的斜率值重构波前。表 1、2 分别为方形、环形区域的部分 Zernike 多项式重构波前。

图 1 为前 35 项各项 Zernike 多项式波前重构精度 (a)为方形区域重构精度 (b)为环形区域重构精度。

对前 35 项各项 Zernike 多项式波前重构的性能

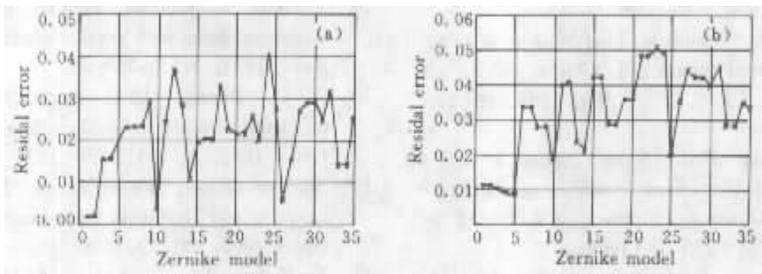


图 1 前 35 项各项 Zernike 多项式波前重构精度

(a) 方形光瞳孔径 (b) 环形光瞳孔径

Fig. 1 Residual RMS errors for the first 35 Zernike models

(a) square zone ;(b) annular zone

表 1 方形区域的部分 Zernike 多项式重构波前

Table 1 Reconstruction images of Zernike Polynomials in square zone

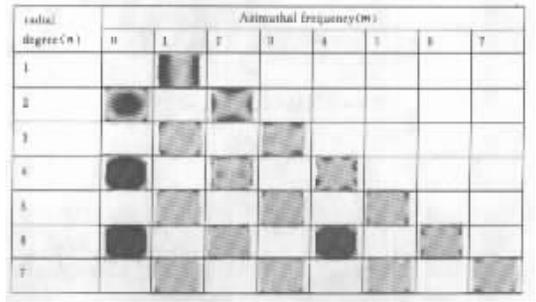
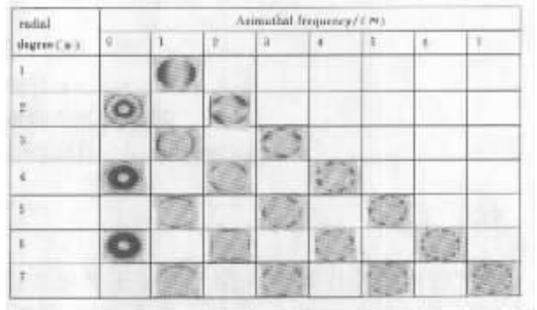


表 2 环形区域的部分 Zernike 多项式重构波前

Table 2 Reconstruction images of Zernike Polynomials in annular zone



仿真后,接下来讨论它们对由多项 Zernike 多项式构成的组合像差波前进行探测及波前重构的情况。根据实际波前常见的像差模式分布,选取前几项 Zernike 多项式有较大系数,而后的 Zernike 多项式系数较小。图 2 为一组组合波像差的原始波前和重构波前,图中(a)为原始波前 (b)为重构波前。

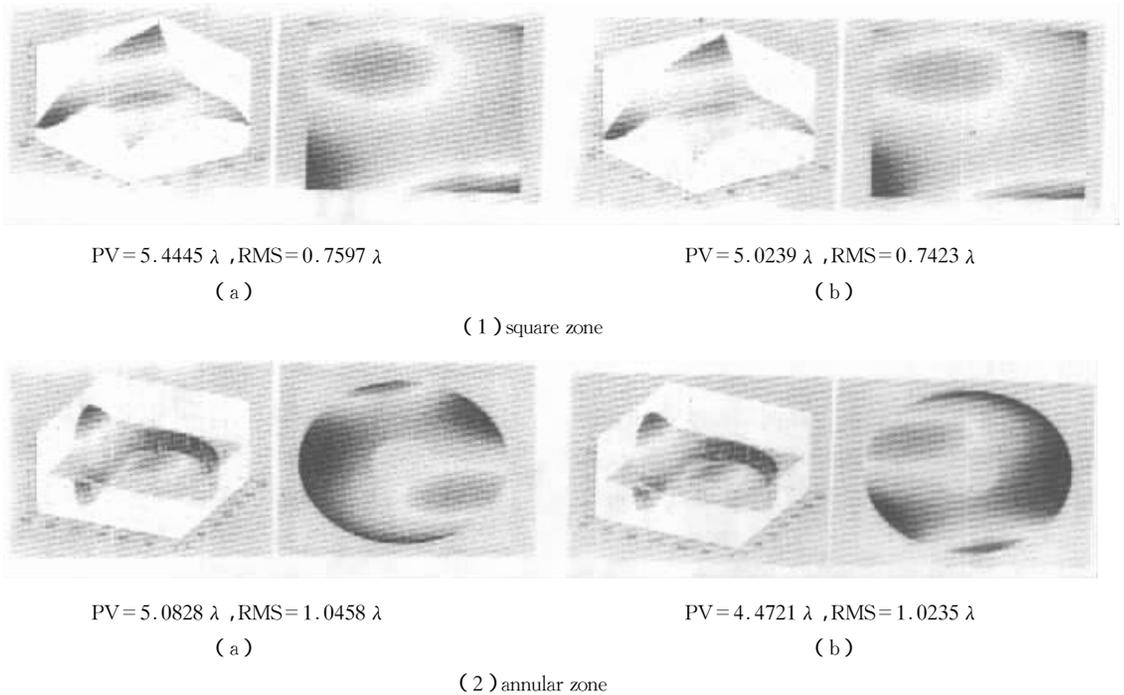


图 2 组合波前相差重构

(a)原始波前 (b)重构波前

Fig. 2 Combinatorial wavefront reconstruction

(a) wavefront defined by Zernike model ;(b) wavefront of reconstruction

5 结 论

本文应用线性代数中线性无关和正交化知识, 建立了一个具有普遍性的夏克-哈特曼波前传感器模式重构的数学模型, 通过方形域和环形域的波前重构仿真实验结果表明: 根据 Zernike 多项式在非圆域的正交化方法, 可实现夏克-哈特曼波前传感器任意形状孔径的波前位相模式重构, 并通过线性变换实现波前的 Zernike 多项式表示, 从而更直观地实现任意形状孔径波前相差 Zernike 多项式描述。

参 考 文 献

- Jiang Wenhan, Wang Chunhong, Ling Ning *et al.*. 61 Element adaptive optical system [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 1998, 15(2): 193~199 (in Chinese)
- Jiang Wenhan, Xian Hao, Yang Zeping *et al.*. Applications of Shack-Hartmann wavefront sensor [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics* (量子电子学报), 1998, 15(2): 228~235 (in Chinese)
- J. Pfund, N. Lindlein, J. Schwider *et al.*. Absolute sphericity measurements: a comparative study of the use of interferometry and a Shack-Hartmann sensor [J]. *Opt. Lett.*, 1998, 23(10): 742~744
- Changhui Rao, Wenhan Jiang, Ning Ling. Measuring the power-law exponent of an atmospheric turbulence phase power spectrum with a Shack-Hartmann wave-front sensor [J]. *Opt. Lett.*, 1999, 24(15): 1008~1010
- W. H. Southwell. Wave-front estimation from wave-front slope measurements [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, 70(8): 998~1006
- R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1976, 66(3): 203~211
- Weiyao Zou, Zhenchao Zhang. Generalized wave-front reconstruction algorithm applied in a Shack-Hartmann test [J]. *Appl. Opt.*, 2000, 39(2): 250~268
- W. H. Swantner, W. H. Lowrey. Zernike-Tatian polynomials for interferogram reduction [J]. *Appl. Opt.*, 1980, 19(1): 161~163
- Virendra N. Mahajan. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, 71(1): 75~85
- J. L. Rayces. Least-squares fitting of orthogonal polynomials to the wave-aberration function [J]. *Appl. Opt.*, 1992, 31(13): 2223~2228
- Segolene Olivier, Vicent Laude, Jean-Pierre Huignard. Liquid-crystal Hartmann wave-front scanner [J]. *Appl. Opt.*, 2000, 39(22): 3838~3846
- Tu Boxun. Linear Algebra [M]. Shanghai: Press of Science and Technology in Shanghai (in Chinese)
- Guangming Dai. Modified Hartmann-Shack wavefront sensing and iterative wavefront reconstruction [C]. *SPIE*, 1994, 2201: 562~573