

文章编号: 0258-7025(2002)05-0425-04

平顶高斯光束在有光阑光学系统中的传输

罗时荣, 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 四川成都 610064)

提要 通过将矩孔函数展为有限个复高斯函数之和的方法, 对直角坐标系中的平顶高斯光束在有光阑限制 $ABCD$ 光学系统中的传输作了研究, 得到了近似的解析传输公式, 并用数值计算例证明了它们的正确性。

关键词 平顶高斯光束, 有光阑限制 $ABCD$ 光学系统, 传输

中图分类号 TN 012 文献标识码 A

Propagation of Flattened Gaussian Beams through an Aperture Optical System

LUO Shi-rong, L Bai-da

(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064)

Abstract By expanding the rect function into a finite sum of complex Gaussian functions, the propagation of flattened Gaussian beams through an apertured optical $ABCD$ system is studied in the rectangular coordinate system, and approximate analytical propagation formulas of flattened Gaussian beams are derived. The validity of our formulas is illustrated with numerical examples.

Key words flattened Gaussian beam, apertured $ABCD$ optical system, propagation

1 引言

由 Gori 引入的平顶高斯光束是描述平顶均匀分布光束的一种重要模型^[1], 在无光阑限制 $ABCD$ 光学系统中, 可推导出平顶高斯光束解析的传输公式^[2~8], 用以方便地研究光束传输问题。遗憾的是, 对有硬边光阑限制的 $ABCD$ 光学系统, 除基模高斯光束等极少数特殊情况外, 一般难于得到解析的传输公式, 只能直接对衍射积分公式进行耗时很多的数值计算^[6]。然而, 实际的光学系统或多或少地受到光阑限制, 所以, 对光束在有光阑限制光学系统中传输的研究更有实际意义。最近, Ding 和 Liu 用 Wen 和 Breazeale 提出的将描述硬边光阑的 circ 函数展为有限个复高斯函数之和表示^[9]的方法, 对贝塞尔光束、贝塞尔-高斯光束和高斯光束在有光阑限制的自由空间中的传输作了研究, 得到了近似的解析传输公式^[10]。本文的目的是将这种方法作进一步推广

应用, 主要工作包括: (1) 考虑了光束在有光阑近轴 $ABCD$ 光学系统中的传输; (2) 对直角坐标系中的平顶高斯光束在上述系统中的传输作了研究, 得到了近似的解析传输公式, 并利用解析公式作了数值计算, 对解析公式的适用范围作了详细讨论。

2 平顶高斯光束在有光阑限制光学系统中的传输公式

在直角坐标系下, $z = 0$ 处的平顶高斯光束表示为^[2]

$$E(x, 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)x^2}{\omega_0^2}\right] \times \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)x^2}{\omega_0^2}\right]^n \quad (1)$$

式中, N 为平顶高斯光束阶数 ($N = 0, 1, \dots$), ω_0 为束腰宽度。在 $z = 0$ 处置一半宽度为 a 的矩孔, 矩孔

收稿日期: 2001-03-26; 收到修改稿日期: 2001-05-31

基金项目: 国家高技术光束控制重点实验室资助项目。

作者简介: 罗时荣(1966.5—), 女, 四川大学物理科学与技术学院副研究员, 在读博士, 主要从事光束传输变换的研究工作。E-mail: luoshirong@263.net

函数表示为

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \leq |a| \\ 0 & x > |a| \end{cases} \quad (2)$$

与圆域中的 circ 函数类似, (2) 式表示的矩孔函数可展为复高斯函数之和^[9,10]

$$H(x) = \sum_{m=1}^M A_m \exp\left(-\frac{B_m x^2}{a^2}\right) \quad (3)$$

式中的系数 A_m 和 B_m 见文献[10]中的表 1。将(1)式和(3)式代入 Collins 公式^[11]

$$E(x, z) = \sqrt{\frac{i}{\lambda B}} \exp\left(-\frac{ikDx^2}{2B}\right) \int_{-\infty}^{\infty} E(x', 0) H(x') \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax'^2 - 2xx')\right] dx' \quad (4)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, λ 分别是平顶高斯光束的波数和波长。利用积分公式^[12]

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \exp(-\alpha^2 x^2) \cos(xy) dx = (-1)^n \pi^{1/2} 2^{-(2n+1)} \alpha^{-(2n+1)} \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha^2}\right) H_{2n}\left(\frac{y}{2\alpha}\right) \quad |\arg \alpha| < \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

通过繁琐的代数运算后, 得到

$$E(x, z) = \frac{\omega_0}{\sqrt{N+1}} \sqrt{\frac{ik}{2B}} \exp\left(-\frac{ikD}{2B}x^2\right) \sum_{m=1}^M A_m \exp\left[-\frac{\left(\frac{kx}{2B}\right)^2}{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B} + \frac{B_m}{a^2}}\right] \times \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \left[\frac{\frac{N+1}{\omega_0^2}}{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B} + \frac{B_m}{a^2}}\right]^{n+\frac{1}{2}} H_{2n}\left[\frac{\frac{kx}{2B}}{\sqrt{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B} + \frac{B_m}{a^2}}}\right] \quad (6)$$

式中的 H_{2n} 是 $2n$ 阶的厄米多项式。在推导过程中, $\alpha^2 = \frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B} + \frac{B_m}{a^2}$, 条件 $|\arg \alpha| < \frac{\pi}{4}$ 自动满足。(6) 式是作为整体的平顶高斯光束在有光阑限制的近轴 ABCD 光学系统中的传输公式。当光阑半宽度 $a \rightarrow \infty$ 时, (6) 式简化为

$$E(x, z) = \frac{\omega_0 \sqrt{\frac{ik}{2B}} \exp\left(-\frac{ikD}{2B}x^2\right)}{\sqrt{N+1}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{kx}{2B}\right)^2}{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}}\right] \times \sum_{n=0}^N \frac{\left(\frac{-1}{4}\right)^n}{n!} \left[\frac{\frac{N+1}{\omega_0^2}}{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}}\right]^{n+\frac{1}{2}} H_{2n}\left[\frac{\frac{kx}{2B}}{\sqrt{\frac{N+1}{\omega_0^2} + \frac{ikA}{2B}}}\right] \quad (7)$$

(7) 式就是作为整体的平顶高斯光束在无光阑限制的光学系统中的传输公式, 与文献[6]中的(4)式相同。

另一方面, 也可将(1)式用有限个厄米-高斯函数之和来表示^[3]

$$E(x, 0) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n)!} \sum_{k'=n}^N \frac{1}{2^{2k'}} \frac{(2k')!}{k'!(k'-n)!} H_{2n}\left[\frac{\sqrt{2(N+1)}}{\omega_0}x\right] \exp\left[-\frac{(N+1)x^2}{\omega_0^2}\right] \quad (8)$$

将(8)式和(3)式代入(4)式, 利用积分公式^[12]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(x-y)^2}{2u}\right] H_m(x) dx = \sqrt{2\pi u} (1-2u)^{\frac{m}{2}} H_m\left[\frac{y}{\sqrt{1-2u}}\right] \quad (9)$$

经过复杂的推导得

$$E(x, z) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n)!} \sum_{k'=n}^N \frac{1}{2^{2k'}} \frac{(2k')!}{k'!(k'-n)!} E_{2n}(x, z) \quad (10)$$

式中的

$$E_{2n}(x, z) = \sum_{m=1}^M A_m \exp\left\{\frac{-ikx^2}{2} \frac{C + \frac{D}{q_0} \left[1 + \frac{\omega_0^2 B_m}{(N+1)a^2}\right]}{A + \frac{B}{q_0} \left[1 + \frac{\omega_0^2 B_m}{(N+1)a^2}\right]}\right\} \frac{\left\{A - \frac{B}{q_0} \left[1 - \frac{\omega_0^2 B_m}{(N+1)a^2}\right]\right\}^n}{\left\{A + \frac{B}{q_0} \left[1 + \frac{\omega_0^2 B_m}{(N+1)a^2}\right]\right\}^{n+1}} \times$$

$$H_{2n} \left[\frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{\left(A - \frac{i2BB_m}{ka^2} \right)^2 \frac{\omega_0^2}{N+1} + \left(\frac{B\lambda \sqrt{N+1}}{\pi\omega_0} \right)^2}} \right] \quad (11)$$

是 $2n$ 阶厄米-高斯光束在有光阑限制的光学系统中的一般传输公式,式中

$$q_0 = \frac{i\pi\omega_0^2}{\lambda(N+1)} \quad (12)$$

是基模高斯光束在 $z=0$ 处的 q 参数。 $a \rightarrow \infty$ 时,(11) 式简化为

$$E_{2n}(r, z) = \frac{(A - B/q_0)^n}{(A + B/q_0)^{n+1}} \exp\left(-\frac{ikx^2}{2q}\right) H_{2n} \left[\frac{\sqrt{2} x}{\omega(z)} \right] \quad (13)$$

这即是 $2n$ 阶厄米-高斯光束在无光阑限制的光学系统中的传输公式,式中的 q 与 q_0 满足 $ABCD$ 定律

$$\frac{1}{q} = \frac{C + D/q_0}{A + B/q_0} \quad (14)$$

而束宽的传输规律为

$$\omega^2(z) = \frac{\omega_0^2}{N+1} \left\{ A^2 + \left[\frac{B\lambda(N+1)}{\pi\omega_0^2} \right]^2 \right\} \quad (15)$$

(6) 式和 (10) 式是本文的主要解析结果,(6) 式和 (10) 式的形式虽然不同,但数值计算结果表明两种形式是完全等价的,其计算范围也一样。

3 数值计算

用公式(6)和(10)可计算平顶高斯光束在有光阑光学系统中的传输,计算结果如图 1,图 2 实线所

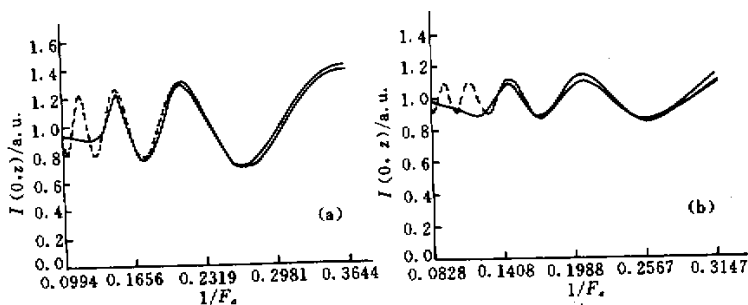


图 1 在自由空间中传输的平顶高斯光束在轴上的光强分布 $I(0, z) = |E(0, z)|^2$ (a. u.)

计算参数为 $N=15, \lambda=1.06 \mu\text{m}$, (a) $\beta=0.5$; (b) $\beta=1$

Fig. 1 Axial intensity distributions $I(0, z) = |E(0, z)|^2$ (arbitrary units) of a flattened Gaussian beam propagating in free space

The calculation parameters are $N=15, \lambda=1.06 \mu\text{m}$, (a) $\beta=0.5$; (b) $\beta=1$

4 结 论

本文通过将硬边光阑函数展为复高斯函数之和

示。在图中也给出了直接用 Collins 公式计算的结果,如图中虚线所示。图 1 是平顶高斯光束在自由空间中传输时,在轴上的光强分布随广义菲涅耳数^[13] $F_a = \frac{Aa^2}{B\lambda}$ 的变化。图 2 是平顶高斯光束在自由空间中传输的横向光强分布。由图知:1) 实线与虚线存在差异,当 $1/F_a$ 较小时,差异较大,而当 $1/F_a$ 较大时,差异较小,并且随着 $1/F_a$ 的增加,差异越来越小。2) 虚线和实线差异小到可忽略的范围,即为解析公式(6),(10)的适用范围,由图知,当截断参数 $\beta=0.5$ 时,该范围为 $1/F_a \geq 0.14$; 当 $\beta=1$ 时,该范围为 $1/F_a \geq 0.13$ 。这可从物理上得到解释,因为误差是由有限个复高斯函数之和作的拟合曲线与实际光阑函数(此处是 rect 函数)之间的差异造成的。数值计算表明,用 10 项复高斯函数拟合的曲线与 rect 函数间确实有误差存在,在光阑中心附近误差很小,而在光阑边缘附近误差较大。另一方面,从衍射积分公式(4)式可看出,当 A/B 较大(对应于 $1/F_a$ 较小)时,被积函数呈现高振荡,所以衍射积分值受光阑边缘附近场分布的影响较大。在拟合所用的复高斯函数和平顶高斯光束一定的情况下,截断参数 β 确定了光阑边缘的场分布。

的方法,在直角坐标系下研究了平顶高斯光束通过有光阑 $ABCD$ 光学系统的传输,得到了近似的解析传输公式(6)和(10)式。解析传输公式的优点是:不

仅可提高计算速度,并且可以利用公式对光束变换特性直接进行分析。此外还对解析公式(6)和(10)式的适用范围作了讨论,即当 $1/F_a$ 较小时(文献[9, 10]中称“非常近的场”,但近轴近似仍成立),解析公式所得结果与直接用衍射积分所得结果有较大差

异,当 $1/F_a$ 较大时,用解析公式能很好地描述平顶高斯光束在光阑光学系统中的传输行为,当截断参数 β 一定时,解析公式的适用范围($1/F_a$)即可确定。

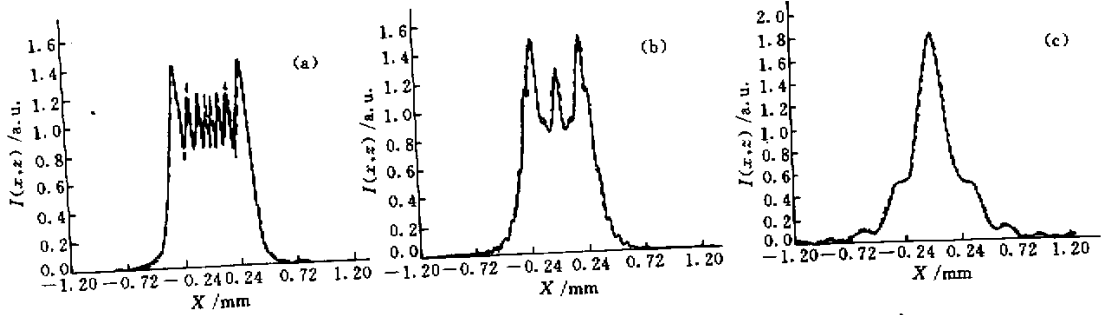


图 2 平顶高斯光束在自由空间中传输的光强分布 $I(x, z) = |E(x, z)|^2$

计算参数为 $N = 15$, $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, $\beta = 0.5$ 。(a) $1/F_a = 0.13$; (b) $1/F_a = 0.33$; (c) $1/F_a = 1.33$

Fig. 2 Intensity distributions $I(x, z) = |E(x, z)|^2$ (arbitrary units) of a flattened Gaussian beam propagating in free space

The calculation parameters are $N = 15$, $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, $\beta = 0.5$. (a) $1/F_a = 0.13$; (b) $1/F_a = 0.33$; (c) $1/F_a = 1.33$

参 考 文 献

- 1 F. Gori. Flattened Gaussian beams [J]. *Opt. Comm.*, 1994, **107**:335~341
- 2 V. Bagini, R. Borghi, F. Gori *et al.*. Propagation of axially symmetric flattened Gaussian beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1996, **13**(7):1385~1394
- 3 S.-A. Amarande. Beam propagation factor and kurtosis parameter of flattened Gaussian beams [J]. *Opt. Comm.*, 1996, **129**:311~317
- 4 C. J. R. Sheppard, S. Saghafi. Flattened light beams [J]. *Opt. Comm.*, 1996, **132**:144~152
- 5 M. Santarsiero, D. Aiello, R. Borghi *et al.*. Focusing of axially symmetric flattened Gaussian beams [J]. *J. Mod. Opt.*, 1997, **44**:633~650
- 6 B. Lü, S. Luo, B. Zhang. Propagation of flattened Gaussian beams with rectangular symmetry passing through a paraxial optical ABCD system with and without aperture [J]. *Opt. Comm.*, 1999, **164**:1~6
- 7 B. Lü, B. Zhang, S. Luo. Far-field distribution, M^2 -factor, and propagation of flattened Gaussian beams [J]. *Appl. Opt.*, 1999, **38**(21):4581~4584
- 8 Luo Shirong, Lü Baida, Zhang Bin. Propagation characteristics of flattened Gaussian beams [J]. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 2000, **20**(9):1213~1217 (in Chinese)
- 9 J. J. Wen, M. A. Breazeale. A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian Beams [J]. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**:1752~1756
- 10 D. Ding, X. Liu. Approximate description for Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams with finite aperture [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(6):1286~1293
- 11 S. A. Collins, Jr.. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9):1168~1177
- 12 A. Erdelyi. Tables of Integral Transforms [M]. New York: McGraw-Hill, 1954. Volume 1 185 and Volume 2 13
- 13 Fan Dianyuan. The Fresnel number in terms of ray elements [J]. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(4):319~325 (in Chinese)