

文章编号: 0258-7025(2002)04-0327-05

开放的 ladder 型三能级无粒子数 反转激光系统

樊锡君¹, 张郡亮^{1, 2}, 李 萍¹, 刘呈普¹

(¹ 山东师范大学物理系, 山东济南 250014; ² 衡水师范专科学校物理系, 河北衡水 053000)

提要 提出了具有非相干抽运的开放的 ladder 型无粒子数反转激光(LWI)系统模型, 给出了定态线性解析解, 研究了探测场和驱动场失谐的变化对无粒子数反转激光增益、色散和粒子数差的影响。结果发现, 开放的 ladder 型系统的无粒子数反转激光增益远大于相应的封闭系统, 其增益、色散和粒子数差的变化规律与开放的 Λ 型及简单三能级无粒子数反转激光系统有很大不同。

关键词 开放系统, ladder 型, 定态, 增益, 色散, 粒子数差

中图分类号 TN 241 **文献标识码** A

Open Ladder-type Three Level Noninversion Lasing System

FAN Xi-jun¹, ZHANG Jun-liang^{1, 2}, LI Ping¹, LIU Cheng-pu¹

(¹ Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan 250014)
(² Department of Physics, Hengshui Normal College, Hengshui 053000)

Abstract A model of an open ladder-type three level noninversion lasing system is presented in this paper. A steady state linear analytical solution, and the effect of the probe and driving fields detunings varying on the noninversion lasing gain, dispersion and population difference are investigated. It is found that the open ladder-type system can obtain the noninversion lasing gain much bigger than that obtained in the corresponding closed ladder type system; the variation rule of the gain, dispersion and population difference in the open ladder type noninversion lasing system is much different from those in the open Λ -type and simple three level noninversion lasing systems.

Key words open system, ladder-type, steady state, gain, dispersion, population difference

1 引 言

80 年代末, 世界著名激光物理学家 Kocharovskaya, Harris 和 Scully 等分别独立地提出了无粒子数反转激光(Lasing Without Inversion, 简称 LWI)的理论模型, 这是对传统激光理论的一个重大突破。近年来 LWI 引起了人们极大的研究兴趣^[1~5]。其原因在于 LWI 的产生是原子相干和量子干涉效应的结果, 可通过无粒子数反转的工作介质把一个相干的低频输入转变成放大的相干高频输出即实现频率的上转换, 从而可以在应用传统激光

理论和方法很难甚至不可能产生激光的高频光谱区产生激光。人们已对封闭原子系统中的 LWI 进行了比较广泛和深入的理论研究, 其中最重要和最具有代表性的原子系统是 Λ , V 和 ladder 型系统。因为开放系统具有某些与封闭系统不同的特点, 是产生 LWI 的一个重要机制, 对开放的原子系统中 LWI 的研究正逐渐成为人们注意的重点。但已进行的研究工作还仅限于开放的 Λ 型和 V 型系统模型^[6~13], 而尚未涉及开放的 ladder 型三能级系统。本文提出一个开放的 ladder 型三能级 LWI 系统模型并给出其线性理论分析。

收稿日期 2000-11-10; 收到修改稿日期 2001-02-19

基金项目 国家自然科学基金(批准号 69978011)资助课题。

作者简介 樊锡君(1947—)男, 山东师范大学物理系教授, 主要从事量子光学和非线性光学方面的研究。E-mail: xijun@jn

2 运动方程及定态线性解

在慢变振幅和旋波近似下,具有非相干抽运的开放的 ladder 型三能级 LWI 系统(图 1)的密度矩

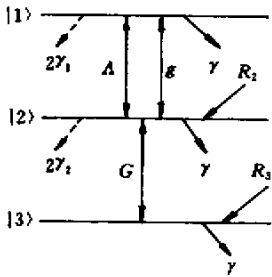


图 1 开放的 ladder 型三能级系统

Fig.1 Open ladder type three level system

$g(G)$ is the Rabi frequency of the probe (driving) field, $R_2(R_3)$ is the injection rate for the level $|2\rangle(|3\rangle)$, γ is the atomic exit rate, $2\gamma_1(2\gamma_2)$ is the decay rate from $|1\rangle$ to $|2\rangle$ (from $|2\rangle$ to $|3\rangle$), Λ is the incoherent pumping rate

阵运动方程组可写为^[14]

$$d\rho_{11}/dt = -2\gamma_1\rho_{11} + ig\rho_{21} - ig\rho_{12} - 2\Lambda(\rho_{11} - \rho_{22}) - \gamma\rho_{11} \quad (1a)$$

$$d\rho_{12}/dt = -(\Gamma_{12} + i\Delta_1)\rho_{12} + ig(\rho_{22} - \rho_{11}) - iG\rho_{13} \quad (1b)$$

$$d\rho_{13}/dt = -(\Gamma_{13} + i\Delta_1 + i\Delta_2)\rho_{13} + ig\rho_{23} - iG\rho_{12} \quad (1c)$$

$$d\rho_{22}/dt = 2\gamma_1\rho_{11} - 2\gamma_2\rho_{22} - ig\rho_{21} + ig\rho_{12} + iG\rho_{32} - iG\rho_{23} + 2\Lambda(\rho_{11} - \rho_{22}) + R_2 - \gamma\rho_{22} \quad (1d)$$

$$d\rho_{23}/dt = -(\Gamma_{23} + i\Delta_2)\rho_{23} + ig\rho_{13} + iG(\rho_{33} - \rho_{22}) \quad (1e)$$

$$d\rho_{33}/dt = 2\gamma_2\rho_{22} - iG\rho_{32} + iG\rho_{23} + R_3 - \gamma\rho_{33} \quad (1f)$$

以及它们的复数共轭方程。其中

$$\Gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 + 2\Lambda + \gamma_{12}, \quad \Gamma_{13} = \gamma_1 + \Lambda + \gamma_{13}, \quad \Gamma_{23} = \gamma_2 + \Lambda + \gamma_{23} \quad (2)$$

在以上表达式中, g, G 分别为探测场和驱动场的 Rabi 频率(为方便计算,我们取 g 和 G 为实量), $\Delta_1(= \omega_{12} - \omega_1)$ 和 $\Delta_2(= \omega_{23} - \omega_2)$ 分别是探测场(频率为 ω_1)和驱动场(频率为 ω_2)的失谐, ω_{12} 和 ω_{23} 分别是能级 $|1\rangle$ 到能级 $|2\rangle$ 和从能级 $|2\rangle$ 到能级 $|3\rangle$ 的跃迁频率, R_2 和 R_3 分别是原子能级 $|2\rangle$ 和 $|3\rangle$ 上的注入速率, γ 为原子与场相互作用后从腔中退出的速率, $2\gamma_1, 2\gamma_2$ 分别是态 $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 和态 $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ 的自发衰变速率, Λ 为非相干抽运速率, γ_{ij} 是能级 i 和 j 之间的非对角衰变速率, ρ_{ii} 为态 $|i\rangle$ 上的粒子数分布, ρ_{ij} 为态 $|i\rangle$ 与态 $|j\rangle$ 之间的原子极化。

对于定态,方程组(1)中所有时间的导数为 0, 我们得到原子极化 ρ_{12} 的虚部和实部、能级粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 的线性解析表达式如下

$$\text{Im}\rho_{12} = \frac{g[(a_4G^4 + a_2G^2)R_3 + (b_4G^4 + b_2G^2 + b_0)R_2]}{\gamma N} \quad (3a)$$

$$\text{Re}\rho_{12} = \frac{g[(d_4G^4 + d_2G^2)R_3 + (f_4G^4 + f_2G^2 + f_0)R_2]}{\gamma N} \quad (3b)$$

$$\rho_{11} - \rho_{22} = \frac{(e_6G^6 + e_4G^4 + e_2G^2)R_3 + (\beta_6G^6 + \beta_4G^4 + \beta_2G^2 + \beta_0)R_2}{\gamma N} \quad (3c)$$

其中 $N = h_6G^6 + h_4G^4 + h_2G^2 + h_0$ (4)

以上表达式中 $G(i=0, 2, 4, 6)$ 的系数为系统参量的函数,其定义式在附录中给出。

系统的增益与极化 ρ_{12} 的虚部 $\text{Im}\rho_{12}$ 成正比。在本文中,如果 $\text{Im}\rho_{12} > 0$, 则为增益,探测激光场被放大;如果 $\text{Im}\rho_{12} < 0$, 则为吸收,探测激光场被削弱。下面根据以上定态解讨论该系统的增益、色散及能级粒子数分布的规律和特点。

3 定态分析

由方程组(3)导出一般情况下产生 LWI ($\text{Im}\rho_{12} > 0, \rho_{11} - \rho_{22} < 0$) 的条件的简单表达式是不可能的,但可以证明,在探测场和驱动场皆共振且强驱动场近似成立即 $G \gg 2\gamma_1, 2\gamma_2, \gamma, R_2, R_3$ 和 Λ 的情况下,产生 LWI 的条件为

$$2\gamma_2 \geq \gamma \quad (5a)$$

或

$$2\gamma_2 < \gamma,$$

$$(k + k_1S)\Gamma_{23} + \chi(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{13}\Gamma_{23}(1 + S) > 0 \quad (5b)$$

其中 $S = R_2/R_3$ 。

下面使用方程组(3)通过数值计算来分析探测场和驱动场失谐的变化对增益、色散和粒子数差所产生的影响。

驱动场共振探测场失谐($\Delta_2 = 0, \Delta_1 \neq 0$)时极化 ρ_{12} 和能级 $|1\rangle, |2\rangle$ 之间的粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 随探测场失谐 Δ_1 的变化分别如图 2(a)和(b)所示。图中所用各参量皆以 γ_1 为单位(以后各图同)。

由图 2 可以看出,增益曲线和粒子数差曲线是轴对称的,而色散曲线是中心对称的。激光增益出现双峰现象,峰顶分别在 $\Delta_1 = 13.25$ 和 $\Delta_1 = -13.25$ 处,谷底在 $\Delta_1 = 0$ 处,当 $|\Delta_1| > 13.25$ 时增益随 $|\Delta_1|$ 的增大而急剧减小并很快趋于零。系统既能

产生粒子数反转激光又能产生 LWI, 决定于探测场失谐的大小。当 $14.37 < |\Delta_1| < 26.53$ 时,系统产生传统方式的粒子数反转激光;当 $|\Delta_1| < 14.37$ 或 $|\Delta_1| > 26.53$ 时,系统产生 LWI。当 $|\Delta_1| < 14.37$ 时,可以获得明显的 LWI 增益,最大增益在这个区域出现。不难发现增益大小变化与粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 大小变化的规律基本相同。当 $\Delta_1 = 0$ 时,色散为 0;伴随着 $|\Delta_1|$ 的增大,色散经历一个增大—减小—增大—减小的过程,最后趋于 0。

当探测场共振驱动场失谐($\Delta_1 = 0, \Delta_2 \neq 0$)时,选取其他参量的值与图 2 相同,得到极化 ρ_{12} 和粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 随驱动场失谐 Δ_2 的变化分别如图 3(a)和(b)所示。

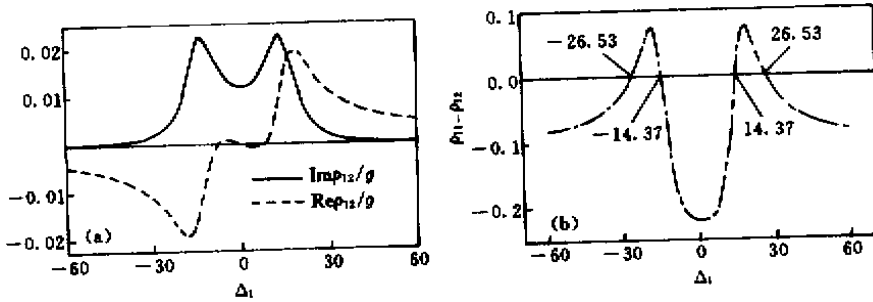


图 2 当 $\Delta_2 = 0$ 时, ρ_{12} (a)和 $\rho_{11} - \rho_{22}$ (b)对 Δ_1 的依赖性

Fig.2 When $\Delta_2 = 0$, dependence of ρ_{12} (a) and $\rho_{11} - \rho_{22}$ (b) on Δ_1 with $G = 14.5, \gamma_2 = 5.45, \Lambda = 1.1, \gamma = 1.2, R_2 = 0.4, R_3 = 0.8, \gamma_{12} = 1.8, \gamma_{13} = 1.2, \gamma_{23} = 3.0$ in the unit γ_1

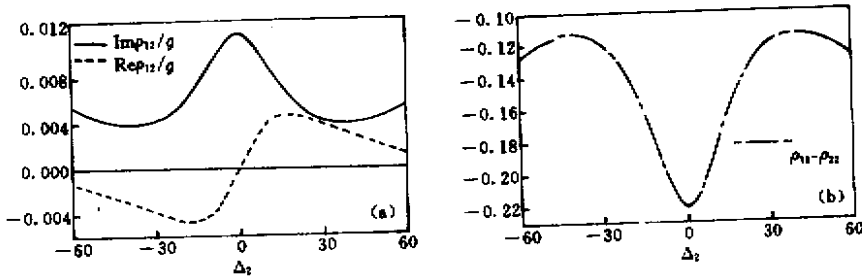


图 3 当 $\Delta_1 = 0$ 时, ρ_{12} (a)和 $\rho_{11} - \rho_{22}$ (b)对 Δ_2 的依赖性

Fig.3 Dependence of ρ_{12} (a) and $\rho_{11} - \rho_{22}$ (b) on Δ_2 when $\Delta_1 = 0$

从图 3(a)(b)可以看出,增益曲线和粒子数差曲线也是轴对称的,色散曲线是中心对称的,但与图 2 所示情况不同的是, $\text{Im}\rho_{12}/g$ 恒大于 0,即系统总能产生 LWI。当 $\Delta_2 = 0$ 即探测场驱动场都共振时,增益有极(最)大值,粒子数差绝对值 $|\rho_{11} - \rho_{22}|$ 也最大。随着 $|\Delta_2|$ 的增大,增益和粒子数差逐渐减小,当 $|\Delta_2| = 37.5$ 时,增益和粒子数差绝对值 $|\rho_{11} - \rho_{22}|$ 均达到一极小值,当 $|\Delta_2|$ 继续增大时,增益和粒子数差绝对值又逐渐增大。可以看到,增益

大小的变化与粒子数差绝对值 $|\rho_{11} - \rho_{22}|$ 大小的变化是同步的,而与粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 大小的变化反相,因此与图 2(考虑对探测场失谐 Δ_1 的依赖性)的情况正好相反。当 $\Delta_2 = 0$ 时,色散为 0,随着 $|\Delta_2|$ 的增大,色散是先增大后减小,最终渐趋于 0。

当探测场和驱动场皆失谐($\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0$)时,取其他参量值与图 2 相同,极化 ρ_{12} 和粒子数差 $\rho_{11} - \rho_{22}$ 对探测场失谐 Δ_1 的依赖性表达在图 4 中。从图 4 可知,1)与图 2 不同,当 $\Delta_2 \neq 0$ 时, ρ_{12} 和 ρ_{11}

- ρ_{22} 的变化曲线对探测场失谐 Δ_1 的依赖性不再具有对称性 2) $\text{Im}\rho_{12}$ 总大于零,随着 Δ_2 的增加,处于 $\Delta_1 < 0$ 区域的增益峰向左(失谐增大的方向)移动,峰值逐渐增大,而处于 $\Delta_1 > 0$ 区域的增益峰向左(失谐减小的方向)移动,峰值逐渐减小,整条增益曲线左移 3) LWI 是分段产生的 4) $\rho_{11} - \rho_{22}$ 曲线与增益曲线的变化类似 5) 随着 Δ_2 的增加,色散的正极大值缓慢减小而负极大值($|\text{Re}\rho_{12}|$) 迅速增加,

整条色散曲线也发生左移。

以上所讨论的增益、色散和粒子数差对探测场和驱动场失谐的依赖性与开放的 Λ 型 LWI 系统^[10] 和开放的简单三能级 LWI 系统^[11] 中的情况大不相同,这来源于系统之间的差别。

图 5(a)(b) 分别给出了封闭的 ladder 型 LWI 系统^[14] 中极化 ρ_{12} 对探测场失谐 Δ_1 和驱动场失谐 Δ_2 的依赖性。其中与本文提出的开放的 ladder 型 LWI 系统所对应的参量的取值分别与图 2 和图 3 相同。

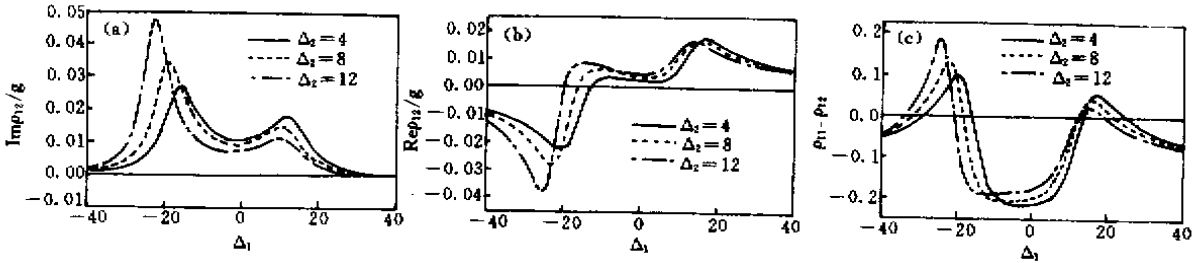


图 4 当 $\Delta_2 \neq 0$ 时, $\text{Im}\rho_{12}$ (a), $\text{Re}\rho_{12}$ (b) 和 $\rho_{11} - \rho_{22}$ (c) 对 Δ_1 的依赖性
Fig. 4 Dependence of $\text{Im}\rho_{12}$ (a), $\text{Re}\rho_{12}$ (b) and $\rho_{11} - \rho_{22}$ (c) on Δ_1 when $\Delta_2 \neq 0$

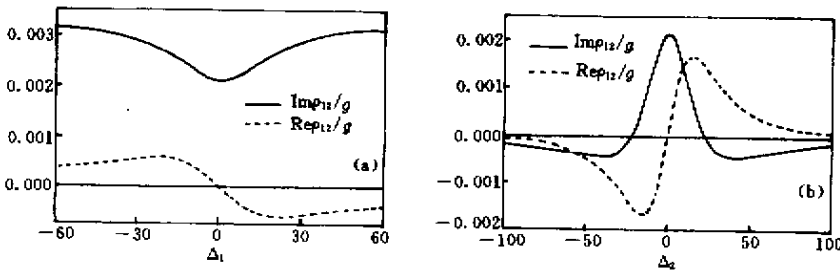


图 5 封闭的 ladder 型 LWI 系统中, ρ_{12} 对 Δ_1 (a) 和 Δ_2 (b) 的依赖性
Fig. 5 In the closed ladder-type LWI system, dependence of ρ_{12} on Δ_1 (a) and Δ_2 (b)

比较图 4(a) 和图 5(a) 可以发现, 封闭系统与开放系统的增益和色散对探测场失谐 Δ_1 的依赖性有以下不同的特点: 1) 开放系统可以产生 LWI 增益也可以产生粒子数反转激光增益, 而封闭系统却总是产生 LWI 增益; 开放系统在 $\Delta_1 = 0$ 附近较小的失谐区内增益较大且出现双峰结构, 在此区域以外, 增益随 $|\Delta_1|$ 的增大迅速减小而趋于 0, $\Delta_1 = 0$ 时, 增益有一极小值但非最小值, 而封闭系统在 $\Delta_1 = 0$ 时, 增益为极小值且为最小值, 随 $|\Delta_1|$ 的增大, 增益由增加较快转变为增加较缓最后趋于一个恒定值; 2) 从总体看来, 色散在两种系统中的变化呈现相反的趋势。比较图 5(b) 与图 4(a) 可知, 封闭系统与开放系统的增益和色散随驱动场失谐 Δ_2 的改变而发生的变化是类似的。注意到图 4(a), 图 5(a) 和图 5(a) 中增益的具体数值, 可以看出开放的 ladder 型 LWI 系

统的最大增益远大于相应情况的封闭系统的最大增益。以上现象产生的原因可作如下物理解释。开放系统中不同能级的原子注入速率(R_2 和 R_3) 及退出速率 γ 的改变将使参与相互作用的原子状态发生变化, R_2 , R_3 和 γ 取某些值时所相应的原子状态可使原子之间的相干作用得到加强, 从而得到更大的 LWI 增益。因此采用开放系统模型对于提高 LWI 增益具有重要的理论意义和应用价值。

4 结论

开放的 ladder 型 LWI 系统增益、色散和粒子数差的变化规律与开放的 Λ 型及简单三能级 LWI 系统有很大不同; 开放的 ladder 型系统的 LWI 增益远大于相应的封闭的 ladder 型系统, 这一点具有重要

的理论意义和应用价值。

参 考 文 献

1 O. Kocharovskaya, Amplification and lasing without inversion [J]. *Phys. Rep.*, 1992, **219** (3 ~ 6): 175 ~ 190

2 P. Mandel. Lasing without inversion : a useful concept ? [J]. *Contemporary Physics*, 1993, **34** (5) 235 ~ 246

3 E. Arimondo. Coherent population trapping in laser spectroscopy [C]. In *Progress in Optics XXXV*, edited by E. Wolf, Amsterdam : Elsevier Science, 1996. 257 ~ 353

4 S. E. Harris. Electromagnetically induced transparency [J]. *Physics Today*, 1997, **50** (7) 35 ~ 42

5 O. Kocharovskaya. Lasing without inversion : Problems and prospects [J]. *Hyperfine Interactions*, 1997, **107** (1 ~ 4) : 187 ~ 195

6 Shiyao Zhu, Dezhong Wang, Jinyue Gao. Nonlinear theory of noninversion lasers of an open three -level system [J]. *Phys. Rev. A*, 1997, **55** (2) : 1339 ~ 1346

7 S. F. Yelin, M. D. Lukin, M. O. Scully *et al.*. Gain without inversion in the frequency up-conversion regime [J]. *Phys. Rev. A*, 1998, **57** (5) 3858 ~ 3868

8 J. T. Manassah, B. Gross. Amplification without inversion in an extended optically dense open Λ -system [J]. *Opt. Comm.*, 1998, **148** (3) 404 ~ 416

9 Fan Xijun, Tian Shufen, Zhang Yonglin. Lasing without inversion in an open V-type three level system [J]. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1999, **26** (7): 608 ~ 612 (in Chinese)

10 Tian Shufen, Li Tianpeng, Fan Xijun. The effects of detunings on the gain in an open Λ type system [J]. *J. Optoelectronics · Laser* (光电子 · 激光), 1999, **10** (2): 165 ~ 169 (in Chinese)

11 Xiao Jian, Fan Xijun. The gain and dispersion of lasing without inversion in an open simple three-level atomic system [J]. *J. Optoelectronics · Laser* (光电子 · 激光), 1999, **10** (5) 461 ~ 464 (in Chinese)

12 Fan Xijun, Tian Shufen, Li Jian *et al.*. Time evolution of atomic response and light amplification mechanism in an open inversionless lasing system [J]. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 2000, **49** (9) : 1719 ~ 1725 (in Chinese)

13 Fan Xijun, Tian Shufen, Liu Jie *et al.*. Analysis of nonlinear gain and oscillation phenomenon of population difference in a V-type inversionless lasing system with coherence injected initially [J]. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2000, **29** (6) 492 ~ 496 (in Chinese)

14 G. Vemuri. Role of inhomogenous broadening in lasing without inversion in ladder systems [J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **53** (2) : 1060 ~ 1064

附录 : 方程组 (3) 中 $G(i = 0, 2, A, B)$ 的系数的定义

$$\begin{aligned}
k &= 2\gamma\gamma_1 + \gamma^2 + 4\gamma\Lambda + 4\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma\gamma_2 + 4\gamma_2\Lambda, & k_1 &= (2\gamma_2 - \gamma r)(2\gamma_1 + \gamma + 2\Lambda), \\
k_2 &= (\Delta_1 + \Delta_2)^2 + \Gamma_{13}^2, & a_4 &= k\Gamma_{23} + 2\Gamma_{13}\Gamma_{23}(2\gamma_1 + \gamma), \\
a_2 &= k[\Gamma_{13}(\Gamma_{12}\Gamma_{23} - \Delta_1\Delta_2) - (\Delta_1 + \Delta_2)(\Gamma_{23}\Delta_1 + \Gamma_{12}\Delta_2)] + 2k_2(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{12}\Gamma_{23}, \\
b_4 &= k_1\Gamma_{23} + (2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{13}\Gamma_{23}, \\
b_2 &= k[\Gamma_{13}(\Gamma_{12}\Gamma_{23} - \Delta_1\Delta_2) - (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Gamma_{23} + \Delta_2\Gamma_{12})] + (2\gamma_1 + \gamma)\gamma\Gamma_{13}(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2) + 2k_2(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{12}\Gamma_{23}, \\
b_0 &= k_2(2\gamma_1 + \gamma)\gamma\Gamma_{13}(\Gamma_{23}^2 + \Delta_2^2), & d_4 &= k\Delta_2 - 2\Gamma_{23}(2\gamma_1 + \gamma)(\Delta_1 + \Delta_2), \\
d_2 &= k[(\Delta_1 + \Delta_2)(\Gamma_{23}\Gamma_{12} - \Delta_1\Delta_2) + \Gamma_{13}(\Gamma_{12}\Delta_2 + \Gamma_{23}\Delta_1)] + 2k_2(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}\Delta_1, \\
f_4 &= k_1\Delta_2 - (2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}(\Delta_1 + \Delta_2), \\
f_2 &= k[\Gamma_{13}(\Gamma_{12}\Delta_2 + \Gamma_{23}\Delta_1) + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Gamma_{23}\Gamma_{12} - \Delta_1\Delta_2)] - (2\gamma\gamma_1 + \gamma^2)(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2) + 2k_2\Delta_1\Gamma_{23}(2\gamma_1 + \gamma), \\
f_0 &= k_2(2\gamma_1 + \gamma)\gamma\Delta_1(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2), & e_6 &= -(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}, \\
e_4 &= (2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}(\Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_2 - \Gamma_{12}\Gamma_{13}), & e_2 &= -2k_2(2\gamma_1 + \gamma)(\Delta_1^2 + \Gamma_{12}^2)\Gamma_{23}, \\
\beta_6 &= -(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}, \\
\beta_4 &= (2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}(\Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_2 - \Gamma_{12}\Gamma_{13}) - (2\gamma_1 + \gamma)(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2), \\
\beta_2 &= -2k_2(2\gamma_1 + \gamma)\Gamma_{23}(\Delta_1^2 + \Gamma_{12}^2) + 2\gamma(2\gamma_1 + \gamma)(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2)[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \Gamma_{12}\Gamma_{13}], \\
\beta_0 &= -k_2(2\gamma_1 + \gamma)(\Gamma_{12}^2 + \Delta_1^2)(\Gamma_{23}^2 + \Delta_2^2), & h_6 &= (2\gamma_1 + \gamma + 3\Lambda)\Gamma_{23}, \\
h_4 &= k(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2) + (2\gamma_1 + \gamma + 3\Lambda)\Gamma_{23}(\Gamma_{12}\Gamma_{13} - \Delta_1^2 - \Delta_1\Delta_2), \\
h_2 &= 2k(\Delta_2^2 + \Gamma_{23}^2)[\Gamma_{12}\Gamma_{13} - \Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2)] + 4k_2\Gamma_{23}(2\gamma_1 + \gamma + 3\Lambda)(\Delta_1^2 + \Gamma_{12}^2), \\
h_0 &= k(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1^2 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2 + \Delta_1^2\Gamma_{13}^2) + k\Gamma_{12}^2\Gamma_{13}^2\Gamma_{23}^2.
\end{aligned}$$