

文章编号: 0258-702X(2002)04-0321-06

# 复杂像散高斯光束的并合光束特性

李宾中<sup>1,2</sup>, 吕百达<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 四川大学激光物理与化学研究所, 四川成都 610064, <sup>2</sup> 川北医学院物理教研室, 四川南充 637007)

**摘要** 利用 Wigner 分布函数对复杂像散高斯光束的并合问题进行了详细研究, 得到了相干和非相干并合光束的光强分布和  $M^2$  因子的解析表达式。解析结果和数值计算均表明, 并合光束的特性与子光束数目、相对间距和几何排布等因素有关。以光束传输因子( $M^2$ )作为标准时, 相干并合光束质量优于非相干并合; 以桶中功率(PIB)作为标准时, 相干并合光束质量并不总优于非相干并合。

**关键词** 复杂像散高斯光束, 光束并合, 光束传输因子( $M^2$ ), 桶中功率

中图分类号 O 435 文献标识码 A

## Beam Combination Characteristics of General Astigmatic Gaussian Beams

LI Bin-zhong<sup>1,2</sup>, LÜ Bai-da<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064)  
(<sup>2</sup> Dept. of Physics, North Sichuan Medical College, Nanchong 637007)

**Abstract** By using Wigner distribution function, the beam combination characteristics of general astigmatic Gaussian beams are studied. The analytical formulas of intensity profiles and beam propagation factor( $M^2$ ) for incoherent and coherent combinations are derived. The analytical and numerical results show that the beam quality of the resulting beam depends on the number, normalized separation distance and geometrical arrangement of beamlets. The beam quality of the coherent combination is better than that of the incoherent combination when the beam propagation factor( $M^2$ ) is chosen as the criterion, whereas the beam quality of the coherent combination is not always better than that of the incoherent combination, if the power in the bucket(PIB) is adopted as the criterion.

**Key words** general astigmatic Gaussian beam, beam combination, beam propagation factor( $M^2$ ), power in the bucket(PIB)

### 1 引言

在强激光技术中,常利用光束并合的办法来实现高功率、高光束质量的光束以满足实际应用。因此,研究光束并合,搞清其物理问题,尤其是并合光束质量具有重要意义。文献[1~3]研究了一维线阵高斯光束的并合。本文采用光束传输因子( $M^2$ )和桶中功率(PIB)作为衡量光束质量的参数,利用 Wigner 分布函数,对影响复杂像散高斯光束的并合光束质量的物理因素、并合方式等问题进行了详细分析和定量计算。

设光束的交叉谱密度为  $I(r_1, r_2)$ , 则其 Wigner 分布函数为<sup>[1,4,5]</sup>

$$W(r, q) = \int I(r + s/2, r - s/2) \exp(-iq^T s) ds \quad (1)$$

式中  $r = x, y$  表示空间坐标,  $q = u, v$  表示空间频率域坐标,上标  $T$  表示转置。Wigner 分布函数同时在空间域和空间频率域描述光束的特性。由它可求出光束的一阶矩、二阶矩

$$f = \int f W(r, q) \lambda dr dq / \iint W(r, q) \lambda dr dq \quad (2)$$

$$fg = \int fg W(r, q) \lambda dr dq / \iint W(r, q) \lambda dr dq \quad (3)$$

式中  $f, g = x, y, u, v$ 。二阶矩构成一个实的  $4 \times 4$  对

收稿日期 2001-06-08;收到修改稿日期 2001-08-20

基金项目 激光技术青年科学基金(No. 2000-3) 激光技术国家重点实验室基金(No. 2001-0010)资助课题。

作者简介 李宾中(1965—)男,四川大学激光物理与化学研究所博士生,副教授,硕士,主要从事光学与激光的教学与科研。E-mail libinzhong@263.net

称光束变量矩阵  $V$  表征光束特性

$$V = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xu & xv \\ xy & y^2 & yu & yv \\ xu & yu & u^2 & uv \\ xv & yv & uv & v^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

光束变量矩阵的传输规律为

$$V_{\text{out}} = SV_{\text{in}}S^T \quad (5)$$

式中  $V_{\text{in}}, V_{\text{out}}$  分别表示入射和出射面的光束变量矩阵,  $S$  为  $4 \times 4$  传输变换矩阵。总的光束传输因子则为<sup>[1]</sup>

$$M_e^2 = 2k \sqrt{\det V} \quad (6)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为波长,  $\det V$  表示对应行列式的值。光束通过一阶光学系统传输时,  $M_e^2$  为不变量。

## 2 光束并合的物理模型

复杂像散高斯光束可表示为<sup>[6]</sup>

$$E(r_1) = \exp\left(-\frac{ik}{2} r_1^T Q_1^{-1} r_1\right) \quad (7)$$

式中  $r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ , 复波前矩阵:  $Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} q_{xx}^{-1} & q_{xy}^{-1} \\ q_{xy}^{-1} & q_{yy}^{-1} \end{bmatrix}$

傍轴光束通过  $ABCD$  一阶光学系统遵从从广义惠更斯-菲涅耳衍射积分公式<sup>[1,6,7]</sup>

$$E(r_2, z) = \frac{i}{\lambda \sqrt{\det B}} \iint E(r_1, 0) \times \exp\left[-\frac{ik}{2} (r_1^T A B r_1 + r_2^T D B r_2 - 2r_1^T B^{-1} r_2)\right] dr_1 \quad (8)$$

设复波前矩阵为

$$Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} -i\lambda/\pi w_x^2 & -i\lambda/\pi w_{xy}^2 \\ -i\lambda/\pi w_{xy}^2 & -i\lambda/\pi w_y^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

的  $N$  ( $N = 2n + 1$  为基数) 束像散高斯光束, 在  $z = 0$  处沿  $x$  方向线性排列, 它们的间距  $x_d$  和  $w_x, w_{xy}, w_y$  分别相同, 如图 1 所示。

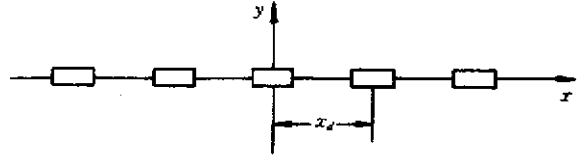


图 1 沿  $x$  轴等间距排列的  $N$  束像散高斯光束

Fig.1 Astigmatic Gaussian beams with equivalent separation distance are aligned along the  $x$ -axis

将(9)式代入(7)式得第  $n$  束光的场分布为

$$E_n(x, y, 0) = \exp\left\{-\left[\frac{(x - nx_d)^2}{w_x^2} + \frac{\chi(x - nx_d)y}{w_{xy}^2} + \frac{y^2}{w_y^2}\right]\right\} \quad n \in \left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right] \quad (10)$$

考虑光束在自由空间中传输, 将对应的  $ABCD$  元素<sup>[6]</sup>和(10)式代入(8)式, 经复杂积分运算得到在自由空间中的传输公式

$$E_n(x, y, z) = \frac{ikw_x w_y w_{xy}^2}{\sqrt{g_0}} \exp\left[-(a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 + d_1 x + e_1 y + f_0)\right] \quad (11)$$

$$(11) \text{ 式中 } a_1 = -k \left[ kw_{xy}^4 w_y^2 - 2iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) \chi(\lambda N_{ux}) \right] / g_0 \quad (11a)$$

$$b_1 = -2k^2 w_x^2 w_{xy}^2 w_y^2 / g_0 \quad (11b)$$

$$c_1 = -k \left[ kw_{xy}^4 w_x^2 - 2iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) \chi(\lambda N_{ux}) \right] / g_0 \quad (11c)$$

$$d_1 = knw_x x_d \left[ 2kw_{xy}^4 w_y^2 - 4iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) \chi(\lambda N_{ux}) \right] / g_0 \quad (11d)$$

$$e_1 = 2k^2 n w_x^3 w_{xy}^2 w_y^2 x_d' / g_0 \quad (11e)$$

$$f_0 = -kn^2 w_x^2 x_d'^2 \left[ kw_{xy}^4 w_y^2 - 2iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) \chi(\lambda N_{ux}) \right] / g_0 \quad (11f)$$

$$g_0 = w_x^2 \left[ \chi(2 + ik\lambda N_{ux}) w_x^2 w_{xy}^4 - 4iw_x^4 w_y^2 + k\lambda N_{ux} (2i - k\lambda N_{ux}) w_{xy}^4 w_y^2 \chi(\lambda N_{ux}) \right] \quad (11g)$$

式中  $N_{ux} = w_x^2/\lambda z$  为与  $w_x$  有关的菲涅耳数,  $x_d' = x_d/w_x$  为相对间距。

## 3 并合光束的光强分布

非相干并合时, 并合光束的光强分布由(11)式得

$$I(x, y, z) = \sum_n I_n(x, y, z) = \frac{k^2 w_x^2 w_y^2 w_{xy}^4}{|g_0|} \times \sum_n \exp\left\{-\left[(a_1 + a_1^*)x^2 + (b_1 + b_1^*)xy + (c_1 + c_1^*)y^2 + (d_1 + d_1^*)x + (e_1 + e_1^*)y + (f_0 + f_0^*)\right]\right\} \quad (12)$$

相干并合时，并合光束的光强分布由(11)式得

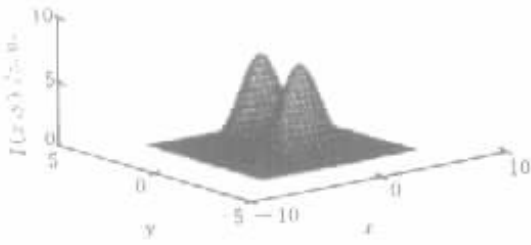
$$I(x, y, z) = \left[ \sum_n E_n(x, y, z) \right] \left[ \sum_n E_n(x, y, z) \right]^* = \frac{k^2 w_x^2 w_y^2 w_{xy}^4}{|g_0|} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \times \exp\{-[(a_1 + a_1^*)x^2 + (b_1 + b_1^*)xy + (c_1 + c_1^*)y^2 + (d_1 + d_m)x + (e_1 + e_m)y + (f_0 + f_{0m})]\} \quad (13)$$

$$d_m = kmw_x x'_d [2kw_{xy}^4 w_y^2 + 4iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) (\lambda N_{ux})] / g_0 \quad (13a)$$

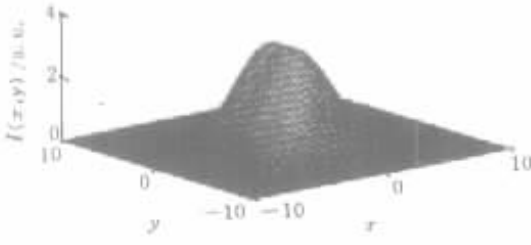
$$e_m = 2k^2 m w_x^3 w_{xy}^2 w_y^2 x'_d / g_0 \quad (13b)$$

$$f_{0m} = -km^2 w_x^2 x'^2_d [kw_{xy}^4 w_y^2 + 2iw_x^2 (w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2) (\lambda N_{ux})] / g_0 \quad (13c)$$

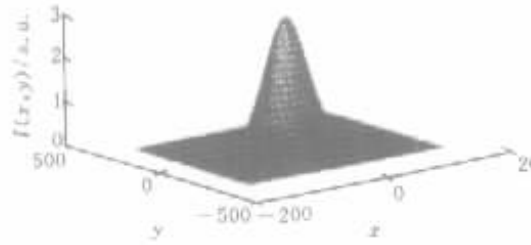
由(12)(13)式可以看出并合光束的光强分布与并合方式、子光束数目、相对间距和几何排布等因素有关。并合光束的光强分布如图2.3所示，由图可知并合光束在传输过程中其形状将发生变化，即使在自由空间中其剖面图也随传输距离变化，当  $N_{ux}$  在某一范围内： $N_{ux} = 0.250 \sim 0.26$  (非相干并合)， $N_{ux} = 1.04 \sim 0.95$  (相干并合)时，出现平顶的光强剖面，如图2(b) ( $N_{ux} = 0.26$ ) 2(b) ( $N_{ux} = 0.99$ )；这对某些实际应用是需要的。由图2(c) 3(c)可看出，两种并合方式所得光束在远场的分布有明显的差别，即相干并合能得到高的峰值光强，而非相干并合光束的远场光强峰值不高，分布相对比较平缓。



(a)



(b)



(c)

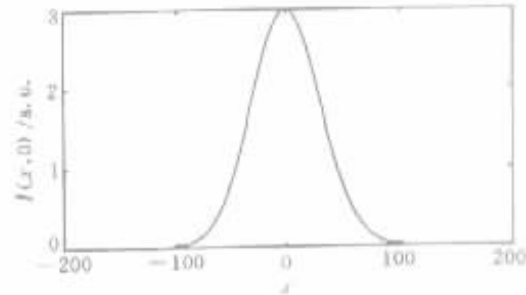
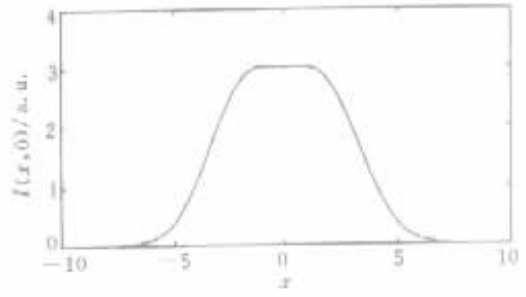
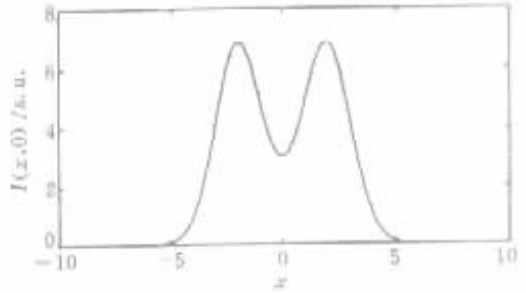


图2 像散高斯光束在非相干并合时的光强分布

(a)  $N_{ux} = 2$ , (b)  $N_{ux} = 0.26$ , (c)  $N_{ux} = 0.01$ 。图中计算所使用的参数： $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x'_d = 1$

Fig.2 Intensity profiles of the resulting beam for the incoherent combination

(a)  $N_{ux} = 2$ , (b)  $N_{ux} = 0.26$ , (c)  $N_{ux} = 0.01$ . The calculation parameters are  $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x'_d = 1$

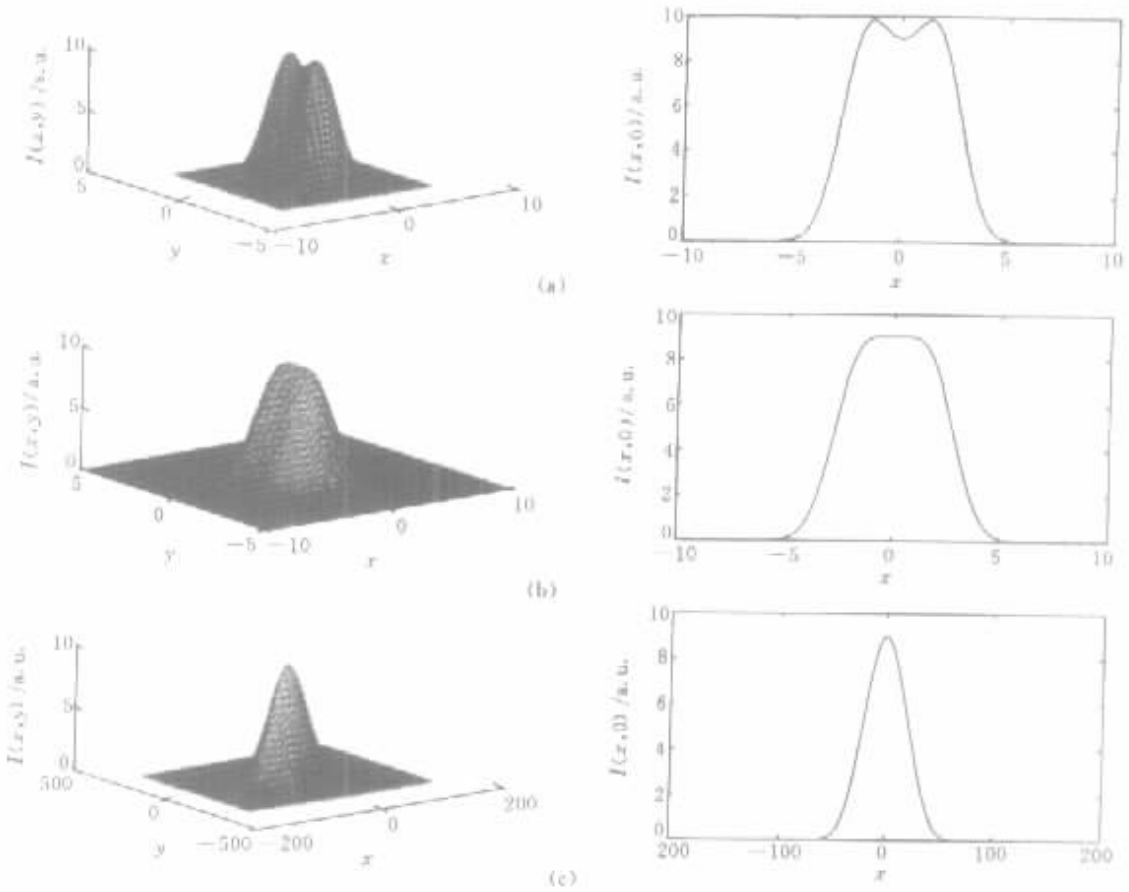


图 3 像散高斯光束在相干并合时的光强分布

(a)  $N_{wx} = 2$ , (b)  $N_{wx} = 0.99$ , (c)  $N_{wx} = 0.01$ . 图中计算所使用的参数:  $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x_d' = 1$

Fig.3 Intensity profiles of the resulting beam for the coherent combination

(a)  $N_{wx} = 2$ , (b)  $N_{wx} = 0.99$ , (c)  $N_{wx} = 0.01$ . The calculation parameters are  $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x_d' = 1$

## 4 并合光束的质量

本文采用光束传输因子( $M^2$ )和 PIB 作为光束质量的判据。

### 4.1 $M^2$ 因子

#### 4.1.1 非相干并合

将入射面 ( $z = 0$ ) 的光场 (10) 式经非相干并合后代入方程 (1), 可得到 Wigner 分布函数, 代入方程 (2)~(4) 可得非相干并合光束在入射面的光束变量矩阵  $V_0$ , 再由 (5) 式和自由空间对应的  $ABCD$  矩阵元, 即可得到任意距离 ( $z$ ) 处的光束变量矩阵  $V_z$

$$V_z = \begin{bmatrix} \frac{w_x^2 w_{xy}^4}{4(w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2)} + \frac{(N^2 - 1)w_x^2 x_d'^2}{12} + \frac{z^2}{k^2 w_x^2} & -\frac{w_x^2 w_{xy}^2 w_y^2}{4(w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2)} + \frac{z^2}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{z}{k^2 w_x^2} & \frac{z}{k^2 w_{xy}^2} \\ -\frac{w_x^2 w_{xy}^2 w_y^2}{4(w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2)} + \frac{z^2}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{w_y^2 w_{xy}^4}{4(w_{xy}^4 - w_x^2 w_y^2)} & \frac{z}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{z}{k^2 w_y^2} \\ \frac{z}{k^2 w_x^2} & \frac{z}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{1}{k^2 w_x^2} & \frac{1}{k^2 w_{xy}^2} \\ \frac{z}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{z}{k^2 w_y^2} & \frac{1}{k^2 w_{xy}^2} & \frac{1}{k^2 w_y^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

将(14)式代入(6)式便得到非相干并合光束的光束传输因子

$$M_e^2 = [1 + (N^2 - 1)x'_d/3]^{1/4} \quad (15)$$

### 4.1.2 相干并合

将光场(10)式经相干并合后代入方程(1),仿照上面的推导,可得相干并合光束的光束传输因子。在简单情况下可得到解析解,例如  $N = 2, 3$

$$M_e^2 = \left\{ \frac{1 - x'^2_d + (1 + x'^2_d)\exp(x'^2_d) + (2 - x'^4_d)\exp(x'^2_d/2)}{[1 + \exp(x'^2_d/2)]^2} \right\}^{1/4} \quad (N = 2) \quad (16a)$$

$$M_e^2 = \{ [4 - 16x'^2_d + \exp(4x'^2_d)] [3 + 8x'^2_d] + \exp(7x'^2_d/2) [24 + 32x'^2_d - 32x'^4_d] - 16\exp(3x'^2_d) [x'^4_d - 1] - 16\exp(3x'^2_d/2) [2x'^2_d + 2x'^4_d - 1] - 4\exp(2x'^2_d) [2x'^2_d + 16x'^4_d - 3] \} [2 + 4\exp(3x'^2_d/2) + 3\exp(2x'^2_d)]^{1/4} \quad (N = 3) \quad (16b)$$

从(15)(16)式可以看出并合光束的  $M^2$  因子与并合方式、子光束数目、相对间距和几何排布有关。

图4是  $M_e^2$  因子随相对间距  $x'_d$  和子光束数目  $N$  的变化曲线,可以看出,当相对间距为零时(相当于

单束光),  $M_e^2 = 1$  随着  $x'_d$  的增加,  $M_e^2$  因子增大;子光束数目  $N$  增加时,  $M_e^2$  因子也增大;并且相干并合光束的  $M^2$  因子总比非相干并合光束的小。

### 4.2 桶中功率

桶中功率是从光束分布的能量集中度来衡量光束质量的,PIB定义为在远场,对给定尺寸的桶内所围住的功率占总功率的份数<sup>[8]</sup>

$$PIB = \int_{-b}^b \int_{-b}^b dx dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y, u, v) du dv / \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y, u, v) du dv dx dy \quad (17)$$

式中  $b$  表示桶宽 ( $x = b, y = b$ ),将光束在自由空间中任一平面 ( $z$  处)的光场(11)式经非相干、相干并合后分别代入方程(1),由方程(17)即可计算出相应的 PIB。

图5是 PIB 随桶相对尺寸变化的曲线。相对桶尺寸:  $b' = b/w_x$ 。从图5可以看出,在  $0 < b' < 26.8$

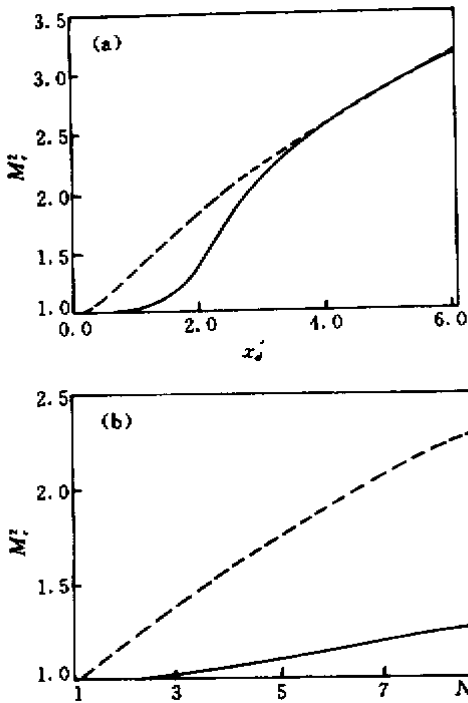


图4 并合光束的  $M_e^2$  因子随  $x'_d$ (a)和  $N$ (b)的变化曲线

图中虚线和实线分别表示非相干和相干并合。计算中所使用的参数:  $w_x = 2, w_y = 1$ , 以及(a)  $N = 3$  和(b)  $x'_d = 1$

Fig.4  $M_e^2$  factor of the resulting beam versus (a)  $x'_d$ , (b)  $N$

The broken and solid lines represent the incoherent and coherent combinations respectively. The calculation parameters are  $w_x = 2, w_y = 1$ , and (a)  $N = 3$ , (b)  $x'_d = 1$

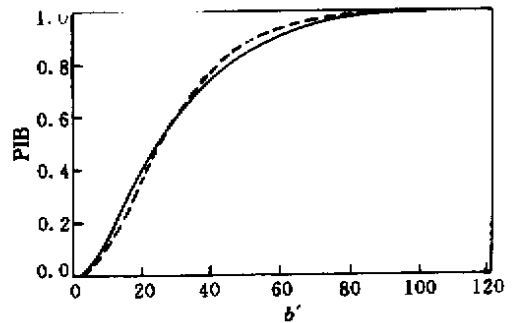


图5 并合光束的 PIB 随  $b'$  的变化曲线

图中虚线和实线分别表示非相干和相干并合。计算中所使用的参数:  $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x'_d = 1, N_{max} = 0.01$

Fig.5 PIB curves of the resulting beam

The broken and solid lines represent the incoherent and coherent combinations respectively. The calculation parameters are  $w_x = 2, w_y = 1, N = 3, x'_d = 1, N_{max} = 0.01$

范围内,相干并合光束的 PIB 大于非相干并合光束的 PIB,而在  $26.8 < b' < 107.5$  范围内,相干并合光束的 PIB 小于非相干并合光束的 PIB;当  $b' > 107.5$  后,相干并合光束和非相干并合光束的 PIB 都趋于 1。显然,相干并合光束的 PIB 并不总优于非相干并合光束的 PIB,应根据实际应用选取合适的桶尺寸。

## 5 小 结

本文利用 Wigner 分布函数,推导出了复杂像散高斯光束通过一阶光学系统的传输规律,当光束按一维离轴的几何排布时,对复杂像散高斯光束的非相干并合、相干并合光束的光强分布、光束传输因子 ( $M^2$ ) 和 PIB 进行了详细的研究,得到了光强分布和  $M^2$  因子的解析公式。解析公式和数值计算结果都表明:并合光束质量与光束并合方式(非相干并合、相干并合)、子光束数目、相对间距和几何排布等因素均有关。以光束传输因子 ( $M^2$ ) 作为判据时,相干并合光束质量优于非相干并合;以 PIB 作为判据时,相干并合光束质量并不总优于非相干并合。在实际应用中,应根据应用目的选取适当的并合方式和参数。最后,应当指出的是,为说明主要物理问题,本文仅对一维排列光束的并合问题作了分析研究,仿照文献 [9],本文所用方法可推广用于研究二维排列

光束的并合问题。

## 参 考 文 献

- 1 Chunqing Gao. Characterization and Transformation of Astigmatic Laser Beams [ M ]. Berlin : Wissenschaft und Technik Verlag , 1999
- 2 Baida Lü , Hong Ma. Coherent and incoherent combination of one-dimensional off-axis Gaussian beams [ J ]. *Optik* , 1999 , **110**( 12 ) : 575 ~ 578
- 3 Gao Chunqing , Wei Guanghui. Study on the beam quality of uncoupled laser diode arrays [ J ]. *Chinese J. Lasers* ( 中国激光 ) , 2001 , **B10**( 4 ) : 241 ~ 245 ( in English )
- 4 M. J. Bastianns. Wigner distribution function and its application to first-order optics [ J ]. *J. Opt. Soc. Am.* , 1979 , **69**( 12 ) : 1710 ~ 1716
- 5 M. J. Bastianns. Wigner distribution function applied to twisted Gaussian light propagation in first-order optical systems [ J ]. *J. Opt. Soc. Am. A* , 2000 , **17**( 12 ) : 2475 ~ 2480
- 6 Lü Baida. Laser Optics [ M ]. Chengdu : Sichuan University Press , 1992 ( in Chinese )
- 7 S. A. Collins , Jr. . Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [ J ]. *J. Opt. Soc. Am.* , 1970 , **60**( 9 ) : 1168 ~ 1177
- 8 A. E. Siegman. How to ( Maybe ) measure laser beam quality [ J ]. *Trends in Optics and Photonics Series* ( Optical Society of America , Washington , D. C. ) , 1998 , **17** : 184 ~ 199
- 9 Baida Lü , Hong Ma. Coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams with rectangular symmetry [ J ]. *Opt. Comm.* , 1999 , **171**( 4 ~ 6 ) : 185 ~ 194

## 国际大型光学会议和展览信息

2002 亚洲-太平洋光学、光电子和光通信、无线通信会议及展览

2002 Asia-Pacific Photonics and Optical/Wireless Communications

Conference and Exhibition

Photonics Asia 2002      APOC2002      Exhibition 2002

主办单位 : SPIE—国际光学工程学会 ; COS—中国光学学会 ; CID—中国通信学会

会议时间 : 2002 年 10 月 14 ~ 18 日 ; 展览时间 : 2002 年 10 月 15 ~ 17 日 ; 地 点 : 上海光大会展中心

详情请查阅网站 : [www.spie.org/info/pa](http://www.spie.org/info/pa) ; [www.spie.org/info/APOC](http://www.spie.org/info/APOC) ; [www.coscentral.org](http://www.coscentral.org)

中国联络处 : 北 京 北京海淀区中关村南大街 5 号 北京理工大学光电工程系 北京 100081

联系人 : 丁伯瑜 , 李翠玲 ( Photonics Asia 2002 和 Exhibition 2002 )

电 话 : 010-68912564 62540941 ; 传 真 : 010-62540941

Email : [pading@bit.edu.cn](mailto:pading@bit.edu.cn) , [dingboyu@sohu.com](mailto:dingboyu@sohu.com)

上 海 : 上海徐汇区华山路 1954 号 上海交通大学物理系 , 上海 200030

联系人 : 夏宇兴 , 叶庆好 ( APOC 2002 )

电 话 : 021-62933125 ; 传 真 : 021-62932019 ; Email : [APOC2002@mail.sjtu.edu.cn](mailto:APOC2002@mail.sjtu.edu.cn)