文章编号:0258-7025(2002)03-0223-04

厄米-高斯光束通过失调光学系统的变换和偏心厄米-高斯光束

丁桂林, 吕百达
(四川大学激光物理与化学研究所, 四川成都 610064)

提要 使用广义惠更斯-菲涅耳衍射积分,增广矩阵和 Wigner 分布函数方法,研究了厄米-高斯光束通过失调一阶 *ABCD* 光学系统的传输特性。证明了在失调光学系统的作用下,厄米-高斯光束不保持封闭性。失调一阶 *ABCD* 光学系统的作用使出射光束变为更一般的具有偏心性质的厄米-高斯光束,称其为偏心厄米-高斯光束,通常的偏心高斯光束可看作本文研究的偏心厄米-高斯光束的特殊情况。

关键词 偏心厄米-高斯光束,失调光学系统,传输特性,Wigner 分布函数
中图分类号 O 435 **文献标识码** A

Propagation of Hermite-Gaussian Beams through a Misaligned First-order Optical System and Decentered Hermite-Gaussian Beams

DING Gui-lin, LÜ Bai-da
(*Institute of Laser Physics & Chemistry*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064)

Abstract Propagation properties of Hermite-Gaussian beams through a misaligned first-order *ABCD* optical systems are studied using the generalized Huygens-Fresnel diffraction integral, augmented matrix and Wigner distribution function methods. It is shown that, as a Hermite-Gaussian beam passes through the misaligned first-order *ABCD* optical system, the closed property is not preserved. The action of the misaligned first-order *ABCD* optical system turns the output beam into a more general class of beam having the decentered property, which can be called the decentered Hermite-Gaussian beam. The usual Hermite-Gaussian beam and decentered Gaussian beam can be regarded as its special cases.

Key words Hermite-Gaussian beam, misaligned optical system, propagation property, Wigner distribution function

1 引 言

众所周知,在用来描述激光光束的数学物理模型中,作为稳定光学谐振腔本征模的厄米-高斯光束是被广泛采用的模型之一。理论上已经证明,厄米-高斯光束通过非失调一阶 *ABCD* 光学系统的变换保持其封闭性,且其形状不变[1]。激光光束通过一阶 *ABCD* 光学系统时的封闭性和形状不变性已经受到广泛的重视和深入的研究[2~6]。文献[7,8]用坐标变换方法引入了偏心高斯光束。偏心高斯光束的概念在研究光束的合成和光束传输中有重要的意义[9,10]。实际工作中由于种种原因会引起光学系统的失调,与文献[7,8]不同的是,本文从广义惠更斯-菲涅耳衍射积分[11]出发,利用增广矩阵和 Wigner 分布函数[12]方法,研究厄米-高斯光束通过失调光学系统的传输特性。分析表明,厄米-高斯光束通过失调一阶 *ABCD* 光学系统的变换不能保持其封闭性,出射光束需要更多的光束参数来描述,从而引入了偏心厄米-高斯光束的概念,并对偏心厄米-高斯光束的一阶矩和二阶矩作了研究。本文所采用的方法可以进一步推广用于研究部分相干光束通过失调光学系统的变换等问题。

收稿日期:2001-01-31;收到修改稿日期:2001-02-28
基金项目:激光技术国家重点实验室资助课题。
作者简介:丁桂林(1957—),男,博士,副教授,主要从事光束传输与光束控制研究。E-mail:guilinding@371.net

2 厄米-高斯光束通过失调一阶 $ABCD$ 光学系统的传输

首先考虑一个由 N 个子系统构成的非失调一阶 $ABCD$ 光学系统。选取直角坐标系 $oxyz$，并使其 oz 轴与系统的光轴重合。令 $\boldsymbol{r}=(x,y)^T$ 和 $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y)^T$ 分别表示光线位置矢量和方向矢量，由矩阵光学可写出联系光学系统出射面和入射面的光线传输方程

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'\\ \boldsymbol{p}'\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AI & BI\\ CI & DI\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{p}\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 S 为描述光学系统的 4×4 矩阵，A，B，C 和 D 为常数，I 为 2×2 单位矩阵。对于一阶 $ABCD$ 光学系统，S 必须满足辛条件[3]，即

$$SJS^T=J,\ J=\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 0 和 I 分别为 2×2 零矩阵和单位矩阵。假定构成该系统的某些子系统失调，这些子系统的光轴与整个系统的光轴不重合，形成位置和方向的失调，但近轴近似仍成立。总的失调量可用如下的两个矢量表示[11]

$$\boldsymbol{e}=(e_x,e_y)^T \qquad \boldsymbol{f}=(f_x,f_y)^T \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 为位置失调量，$\boldsymbol{f}$ 为方向失调量。整个失调系统由 5×5 增广矩阵 S_a 描述，且有

$$S_a=\begin{bmatrix}AI & BI & \boldsymbol{e}\\ CI & DI & \boldsymbol{f}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中 0 为 1×2 零矩阵。光线传输方程为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'\\ \boldsymbol{p}'\\ 1\end{bmatrix}=S_a\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{p}\\ 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

用 $E(x,y)$ 表示入射光束的场分布，$E'(x,y)$ 表示出射光束的场分布，则 $E'(x,y)$ 和 $E(x,y)$ 的关系由失调系统的广义惠更斯-菲涅耳衍射积分决定[11]

$$E'(x,y)=\frac{ik}{2\pi B}\Delta\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{f}\end{bmatrix}\iint \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'E(x',y')\times \exp\frac{-ik}{2B}\left[A(x'^2+y'^2)-2(xx'+yy')+D(x^2+y^2)\right] \tag{6}$$

其中 Δ 为失调算符，其定义为

$$\Delta\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{f}\end{bmatrix}E(x,y)=\exp\left[ik\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{f}\right]\exp\left[-ik(f_xx+f_yy)\right]\times E(x-e_x,y-e_y) \tag{7}$$

下面考虑在直角坐标系下具有简单像散的高阶高斯光束——厄米-高斯光束通过失调一阶 $ABCD$ 光学系统的变换。一般情况下，描述具有简单像散的厄米-高斯光束需要 6 个独立的实参数[5]，可取为 x 和 y 方向的束宽、等位相面曲率半径和远场发散角。不失一般性，设光束在 $z=0$ 面入射，且束腰亦位于该面上，此时等位相面曲率半径趋于无穷大，入射厄米-高斯光束的场分布为[1]

$$E(x,y)=H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_{x0}}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_{y0}}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{w_{x0}^2}-\frac{y^2}{w_{y0}^2}\right) \tag{8}$$

其中 w_{x0} 和 w_{y0} 分别为对应的基模高斯光束在 x 和 y 方向的束宽，其在 x 和 y 方向的瑞利长度分别为

$$Z_{Rj0}=kw_{j0}^2/2 \qquad (j=x,y) \tag{9}$$

m 和 n 分别为在 x 和 y 方向的模序数。将方程(8)代入方程(6)，经过冗长的积分运算后得到出射光束的场分布

$$\begin{aligned}E'(x,y)=&\sqrt{\frac{w_{x0}w_{y0}}{w_xw_y}}H_m\left(\frac{\sqrt{2}(x-\bar{x})}{w_x}\right)\times\\ &H_n\left(\frac{\sqrt{2}(y-\bar{y})}{w_y}\right)\times\\ &\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{w_x^2}-\frac{(y-\bar{y})^2}{w_y^2}\right]\times\\ &\exp\left\{-ik\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{2R_x}+\frac{(y-\bar{y})^2}{2R_y}+\right.\right.\\ &\left.\left.(x-\bar{x})\bar{p}_x+(y-\bar{y})\bar{p}_y\right]\right\}\times\\ &\exp\left[i\left(m+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{B}{Z_{Rx}}\right)+\right.\\ &\left.i\left(n+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{B}{Z_{Ry}}\right)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}&Z_{Rj}=AZ_{Rj0}\\ &w_j^{\,2}=w_{j0}^{\,2}(A^2+B^2z_{Rj0}^{\;-2})\\ &R_j=(A^2+B^2z_{Rj0}^{\;-2})/(AC+BDz_{Rj0}^{\;-2})\\ &\qquad (j=x,y)\end{aligned} \tag{11}$$

$$(\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{p}_x\ \bar{p}_y)=(e_x\,e_y\,f_x\,f_y) \tag{12}$$

Z_{Rx}，Z_{Ry}，w_x，w_y 和 R_x，R_y 分别为相应高斯光束在 x，y 方向的瑞利长度、束宽和等位相面曲率半径。由方程(11)可知，当厄米-高斯光束通过失调一阶 $ABCD$ 光学系统时，光束的瑞利长度、束宽和等位相面曲率半径的变换如同该光束通过相应的非失调一阶 $ABCD$ 光学系统时光束的瑞利长度、束宽和等位相面曲率半径的变换，而($\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ \bar{p}_x\ \bar{p}_y$)是由于光学

系统的失调而产生的四个新的光束参数。($\bar{x}$ $\bar{y}$) 表示光强分布峰值的位置,($\bar{p}_x$ $\bar{p}_y$) 表示光束的传输方向。由方程(12) 可以看出他们由光学系统的失调量所决定。出射光束光强分布峰值的位置和传输方向都偏离了入射光束的光轴,这表示该出射光束具有偏心的性质。由方程(10) 所描述的光束不同于通常的厄米 - 高斯光束,要完全描述该类光束需要 10 个独立的实参数。我们称该类光束为偏心厄米 - 高斯光束。由上述分析可得出结论 :失调一阶 $ABCD$ 光学系统对具有 6 个独立光束参数的厄米 - 高斯光束的变换产生了具有 10 个独立光束参数的偏心厄米 - 高斯光束,厄米 - 高斯光束在失调一阶 $ABCD$ 光学系统的变换下不再保持其封闭性。容易证明,通常的厄米-高斯光束和文献[7,8]讨论的偏心高斯光束可以看作本文所研究的偏心厄米-高斯光束的特殊情况。

3　偏心厄米-高斯光束的一阶矩和二阶矩

对一阶矩和二阶矩的研究可以深入了解光束的特性。可用多种方法得到光束的一阶矩和二阶矩,其中以 Wigner 分布函数方法为简明、规范。相干光束的 Wigner 分布函数的定义如下[12]

$$W(x,y,p_x,p_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x - x'/2, y - y'/2) \times E^*(x + x'/2, y + y'/2) \times \exp[- ik(p_x x' + p_y y') \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \tag{13}$$

以 Wigner 分布函数为权重的一阶矩和二阶矩矩阵的定义分别是[10]

$$\bar{\xi} = \frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi W(x,y,p_x,p_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y \quad (\xi = [x,y,p_x,p_y]^T) \tag{14}$$

$$V = \overline{(\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^T} = \frac{1}{I}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^T \times W(x,y,p_x,p_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y \tag{15}$$

其中

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,y,p_x,p_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y \tag{16}$$

将方程(10)代入方程(13),利用方程(14) ~ (16),略去中间冗长的积分运算过程,最后得到出射面处偏心厄米-高斯光束的一阶矩和二阶矩矩阵分别是

$$\bar{\xi} = S\bar{\xi}_0 + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$V = SV_0 S^T \tag{18}$$

其中

$$\bar{\xi}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \tag{19}$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} w_{x0}^2(2m+1)/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{y0}^2(2n+1)/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2m+1)/k^2 w_{x0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2n+1)/k^2 w_{y0}^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

分别是入射厄米-高斯光束的一阶矩矩阵和二阶矩矩阵。方程(17)和(18)分别给出了厄米-高斯光束通过失调的一阶 $ABCD$ 光学系统变换时其一阶矩矩阵和二阶矩矩阵的变换规律。可以看出,当厄米 - 高斯光束通过失调一阶 $ABCD$ 光学系统变换时,其二阶矩矩阵与厄米 - 高斯光束通过非失调一阶 $ABCD$ 光学系统时的变换规律相同,其一阶矩矩阵遵循几何光线通过该系统的变换规律。由方程(19) 和(17),入射厄米 - 高斯光束的一阶矩为零,这表示入射光束远场和近场的重心都在其光轴上,而出射光束的一阶矩不为零,说明出射的偏心厄米 - 高斯光束远场和近场的重心都不在光轴上,光束具有偏心的性质。方程(17) 所表示的一阶矩具有 4 个独立参数,方程(18) 给出的二阶矩具有 6 个独立参数,用这 10 个独立的参数可描述偏心厄米 - 高斯光束。由方程(18) 易得,当厄米 - 高斯光束通过失调的一阶 $ABCD$ 光学系统变换时存在传输不变量 M_{eff}^2 因子

$$M_{\mathrm{eff}}^2 = 2k\sqrt[4]{\det V} = \sqrt{(2m+1)(2n+1)} \tag{21}$$

与厄米 - 高斯光束通过非失调一阶 $ABCD$ 光学系统时的 M_{eff}^2 因子相同。由以上的讨论可得,一阶 $ABCD$ 光学系统的失调对二阶矩的变换定律和 M^2 因子没有影响,但对光束的一阶矩产生了作用,一阶矩的变

换遵循几何光线的变换规律。

4 结 论

本文主要特点是采用比文献[7，8]更为普遍的分析方法,即广义的惠更斯-菲涅耳衍射积分、增广矩阵和 Wigner 分布函数方法,研究了厄米-高斯光束通过失调一阶 *ABCD* 光学系统的变换规律。结果表明,厄米 - 高斯光束通过失调一阶 *ABCD* 光学系统后,出射光束为偏心厄米 - 高斯光束。在失调一阶 *ABCD* 光学系统的变换下,厄米 - 高斯光束不保持其封闭性,其光束参数由 6 个变为 10 个。一阶光学系统的失调并不影响光束的二阶矩和光束传输因子(M^2 因子),但对光束的一阶矩产生作用,其一阶矩遵循几何光线的变换规律。偏心高斯光束可以看作偏心厄米-高斯光束的特例。本文所用方法,可进一步用于研究更为一般的部分相干光束的偏心特性及其传输变换规律。

参 考 文 献

1 A. Siegman. Lasers [M]. Oxford, UK: Oxford U. Press, 1986. Chap.19

2 F. Gori, G. Guattari. A new type of optical fields [J]. *Opt. Comm.*, 1983, **48**(1): 7~12

3 R. Simon, E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, Anisotropic Gaussian Schell-model beams: Passage through optical systems and associated invariants [J]. *Phys. Rev. A*, 1985, **31**(4): 2419~2434

4 R. Simon, N. Mukunda. Twisted Gaussian Schell-model beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(1): 95~109

5 G. Names, A. E. Siegman. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(8): 2257~2264

6 R. Simon, N. Mukunda. Gaussian Schell-model beams and general shape invariance [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(10): 2465~2475

7 A.-A. R. Al-Rashed, B. E. A. Saleh. Decentered Gaussian beams [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(30): 6819~6825

8 C. Palma. Decentered Gaussian beams, ray bundles, and Bessel-Gauss beams [J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(6): 1116~1120

9 B. Lü, H. Ma. Coherent and incoherent off-axis Hermite-Gaussian beam combinations [J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(8): 1279~1289

10 B. Lü, H. Ma. Coherent and incoherent combinations of off-axis Gaussian beams with rectangular symmetry [J]. *Opt. Comm.*, 1999, **171**(4~6): 185~194

11 M. Nazarathy, A. Hardy, J. Shamir. Misaligned first-order optics: canonical operator Theory [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986, **3**(3): 1360~1369

12 M. J. Bastiaans. Wigner distribution function and its application to first-order optics [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(12): 1710~1716