

文章编号: 0258-702X(2002)02-0169-04

二维信号 Wigner 分布的数值计算

蒋金波, 程兆谷, 梁培辉, 刘 颖, 赵全忠, 刘翠青, 柴雄良, 黄惠杰

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

提要 Wigner 分布函数作为一个同时表达空间/频率变量的函数, 在光学领域中有着广泛的应用。提出了二维信号 Wigner 分布函数的数值计算方法, 并模拟了一些二维实信号(圆孔, 圆环和方孔)的 Wigner 分布函数。

关键词 Wigner 分布函数, 空间/频率, 二维信号

中图分类号 O 431 **文献标识码** A

Calculation of 2-D Signal 's Wigner Distribution

JIANG Jin-bo, CHENG Zhao-gu, LIANG Pei-hui, LIU Ying,

ZHAO Quan-zhong, LIU Chui-qing, CAI Xiong-lian, HUANG Hui-jie

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract Wigner distribution as a function expressing signal in space and frequency field simultaneously, is caused an extensively interest in the world. But up to now, the main methods reported to obtain the Wigner distribution of 2D signals are through optical ways. The discrete numerical methods reported to obtain Wigner distribution is only limited to one dimension, for the Wigner distribution of 2D signals contain 4D variables (2D space variables and 2D frequency variables), its calculation is intricate, and till now, there is no report of this aspect. In this paper, the discrete calculation method of Wigner distribution for 2D signals is put forward, and the Wigner distributions of 2D real signals (a circle aperture, a ring aperture and a rectangle aperture) are simulated.

Key words Wigner distribution function, space and frequency field, 2D-signal

1 引 言

Wigner 分布函数是 1932 年 Wigner 提出的, 用于热力学的量子力学描述^[1]。当初, Wigner 分布并没有引起广泛的注意, 直到最近, 才发现 Wigner 分布在科学和工程技术应用中大有作为。1978 年 Bastiaans 把 Wigner 分布函数引入到了光学中^[2], 作为一个同时表达空间域和频率域的函数。这种对空间域和频率域的同时表述, 使它既能表达几何光学的概念, 又体现了信息光学的特征, 所以引起了广泛的关注, 是当今光学研究中一个较为热门的话题。

作为一个可以同时频率域和空间域进行分析的表达式, 它可以应用在用 $ABCD$ 矩阵表示的一阶

光学系统中^[3] (包括薄透镜系统、自由空间传播、无像差成像系统、放大系统、傅里叶变换系统等), 也可以运用在部分相干光传输^[4]、光学位相、空间、光束质量因子的分析, 光学系统的成像质量, 以及波动光学的其他领域^[5, 6]。

Wigner 分布函数一个最重要的运用是: 它还可以运用于信号分析、纹理信息处理和图像识别^[7, 8]。传统的信号分析和图像识别都是用傅里叶变换, 但是傅里叶只包含频率信息或只包含空间信息。而二维信号的 Wigner 分布函数同时包括空间信息和频率信息(方向信息), 它是四维函数, 在图像识别中可以作为一种编码方式, 它包括有大量的信息量。

到目前为止, 国外文献中研究的二维信号

收稿日期 2001-08-06; 收到修改稿日期 2001-09-11

基金项目 国家自然科学基金(批准号: 69978022)资助项目。

作者简介 蒋金波(1974.11—)男, 中国科学院上海光学精密机械研究所激光应用工程 R&D 中心博士研究生, 主要从事激光与光电子研究。E-mail: jiangjinb@263.net

Wigner 分布的产生一般是采用光学的方法,用数值计算的方法来产生 Wigner 分布函数也只是限于一维信号,由于二维信号的 Wigner 分布函数包括有四维变量(二维空间变量和二维频率变量),运算比较复杂,目前它的数值计算方法还没有报道。

本文介绍了二维信号的 Wigner 分布的数值计算方法,并模拟了一些二维实信号的 Wigner 分布函数。

2 Wigner 分布函数

二维信号 $f(x, y)$ 的 Wigner 分布函数定义为: Wigner 分布函数在空间域为

$$W_f(x, y; u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{1}{2}x', y + \frac{1}{2}y'\right) \times f^*\left(x - \frac{1}{2}x', y - \frac{1}{2}y'\right) \times \exp[-i2\pi(ux' + vy')] dx' dy' \quad (1)$$

Wigner 分布函数在频率域为

$$W_f(x, y; u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} F\left(u + \frac{1}{2}u', v + \frac{1}{2}v'\right) \times F^*\left(u - \frac{1}{2}u', v - \frac{1}{2}v'\right) \times \exp[i2\pi(xu' + yv')] du' dv' \quad (2)$$

式中 x, y 为空间变量, u, v 为频率变量, i 表示虚数, “ $*$ ”号表示复共轭, F 为 f 的傅里叶变换。Wigner 有以下一些特征:

1) Wigner 分布函数是厄米特型 $f\left(x + \frac{1}{2}x', y + \frac{1}{2}y'\right) f^*\left(x - \frac{1}{2}x', y - \frac{1}{2}y'\right)$ 的傅里叶变换,它是实函数。

2) 给定一频率值 (u, v) 对 W_f 在空间变量 (x, y) 范围内进行积分为该频率的能量谱密度,而给定一空间点 (x, y) ,对 W_f 在频率变量 (u, v) 范围内进行积分为该点的区域功率

$$\iint_{-\infty}^{\infty} W_f(x, y; u, v) dx dy = |F(u, v)|^2 \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} W_f(x, y; u, v) du dv = |f(x, y)|^2 \quad (4)$$

3) 当频率 u, v 为 $(0, 0)$ 时, W_f 为信号 $f(x, y)$ 的自卷积,当空间坐标 (x, y) 为 $(0, 0)$ 时, W_f 为频率 $F(u, v)$ 的自卷积

$$W_f(x, y; 0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{1}{2}x', y + \frac{1}{2}y'\right) \times f^*\left(x - \frac{1}{2}x', y - \frac{1}{2}y'\right) dx' dy' \quad (5)$$

$$W_f(0, 0; u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{1}{2}u', v + \frac{1}{2}v'\right) \times f^*\left(u - \frac{1}{2}u', v - \frac{1}{2}v'\right) du' dv' \quad (6)$$

3 Wigner 分布函数的计算

3.1 Wigner 分布函数的计算过程

根据 Wigner 分布函数的定义,令 $\xi = \frac{1}{2}x', \eta = \frac{1}{2}y'$ (1) 式变成

$$W_f(x, y; u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x + \xi, y + \eta) f^*(x - \xi, y - \eta) \times \exp[-i2\pi(2u\xi + 2v\eta)] d\xi d\eta = 4 \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x, \eta + y) f^*[-(\xi - x, \eta - y)] \times \exp[-i2\pi(2u\xi + 2v\eta)] d\xi d\eta \quad (7)$$

上式可以解释成:将函数 $f(\xi, \eta)$ 做两次平移,第一次将函数由原点平移到点 $(-x, -y)$,形成函数 $f(\xi + x, \eta + y)$,第二次将函数由原点平移到点 (x, y) ,形成函数 $f(\xi - x, \eta - y)$,再在平面内绕其自身中心转 180° 并取其复共轭,形成函数 $f^*[-(\xi - x, \eta - y)]$,两函数重叠的区域形成 $f(\xi + x, \eta + y) f^*[-(\xi - x, \eta - y)]$,再对其进行傅里叶变换,就是函数 $f(x, y)$ 的 Wigner 分布。当 $f(x, y)$ 为实函数时,它的复共轭为其本身。二维实信号 $f(\xi + x, \eta + y) f^*[-(\xi - x, \eta - y)]$ 的形成过程如图 1 所示,注意公式 (6) 中的傅里叶变换,其指数式中多了个 2 的倍数。

文献 [9, 10] 提出了光学产生二维实信号 Wigner 分布函数的方法。

3.2 Wigner 分布函数的模拟

在实际的信号分析过程中,为了便于数值计算

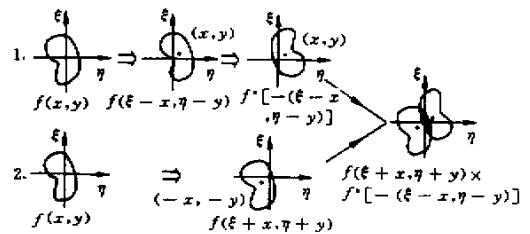


图 1 $f(\xi + x, \eta + y) f^*[-(\xi - x, \eta - y)]$ 的形成过程

Fig.1 Formation of product

$$f(\xi + x, \eta + y) f^*[-(\xi - x, \eta - y)]$$

和处理,往往把一个连续的量表示成离散的。

众所周知,离散的二维傅里叶变换可由下式来表示

$$F(\theta, \delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) \exp[-j(n\theta + m\delta)] \quad (8)$$

其中 $\theta = \frac{2k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1$

$\delta = \frac{2l\pi}{M}, l = 0, 1, \dots, M-1$

n, m 为空间变量, θ, δ 为频率变量, N, M 为信号 f 在 x, y 方向上的取样点数, j 表示虚数。离散傅里叶变换以 2π 为周期。

将公式(7)的 Wigner 分布式表示成离散形式

$$W_f(n, m; \theta, \delta) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f(k+n, l+m) \times f^*[(k-n, l-m)] \exp[-2j(k\theta + l\delta)] \quad (9)$$

其中 $\theta = \frac{2k\pi}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1$

$\delta = \frac{2l\pi}{M}, l = 0, 1, \dots, M-1$

当二维实信号为圆孔时,信号 $f(x, y)$ 可以写成

$$f(k, l) = \begin{cases} 1, & k^2 + l^2 \leq R^2 \\ 0, & k^2 + l^2 > R^2 \end{cases} \quad (10)$$

其中 R 为圆孔的半径。

对于二维实信号为圆环的情况,信号 $f(x, y)$ 可以写成

$$f(k, l) = \begin{cases} 1, & r^2 \leq k^2 + l^2 \leq R^2 \\ 0, & k^2 + l^2 < r^2 \text{ 或 } k^2 + l^2 > R^2 \end{cases} \quad (11)$$

其中 r 为圆环的内径, R 为圆环的外径。

当二维实信号为方孔时,信号 $f(x, y)$ 可以写成

$$f(k, l) = \begin{cases} 1, & -\frac{L}{2} \leq k, l \leq \frac{L}{2} \\ 0, & k, l < -\frac{L}{2} \text{ 或 } k, l > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (12)$$

其中 L 为方孔的边长。

将公式(10)(11)和(12)代入公式(9)中,经过计算机计算,可以得出圆孔、圆环和方孔空间变量 (m, n) 在不同位置时的 Wigner 分布,图2显示了圆和圆环上各点的 Wigner 分布。图中圆的半径为 3 mm,圆上各点的坐标从点 0 到点 4 分别为 $(0, 0), (0.5, 0.5), (1.0, 1.0), (1.5, 1.5), (2.0, 2.0)$,左侧图从上到下分别显示了各点的 $f(x + x'/2, y +$

$y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ 和 $W_f(x, y; u, v)$ 从上到下显示的 Wigner 分布分别为 $W_f(0, 0; u, v), W_f(0.5, 0.5; u, v), W_f(1.0, 1.0; u, v), W_f(1.5, 1.5; u, v), W_f(2.0, 2.0; u, v)$ 。右侧图中圆环的内圆半径为 2 mm,外圆半径为 3 mm。图中各点坐标从 0 到 5 分别为 $(0, 0), (0.25, 0.25), (0.8, 0.8), (1.6, 1.6), (2.25, 2.25), (2.5, 2.5)$,从上到下分别显示了 1 点到 5 点的 Wigner 分布 $W_f(0.25, 0.25; u, v), W_f(0.8, 0.8; u, v), W_f(1.6, 1.6; u, v), W_f(2.25, 2.25; u, v), W_f(2.5, 2.5; u, v)$,点 0 为中心点,由于圆本身是对称的,它的 Wigner 分布为其本身的傅里叶变换。

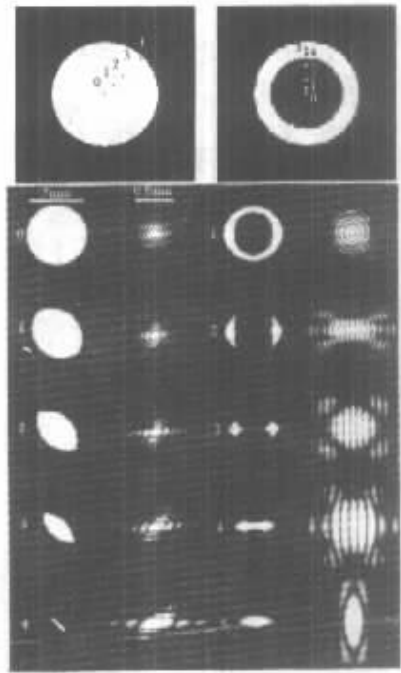


图2 圆和圆环的 Wigner 分布

左侧图为圆上点 0, 1, 2, 3, 4 的 $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ 和相应的 Wigner 分布,右侧图为圆环上点 1, 2, 3, 4, 5 的 $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ 和相应的 Wigner 分布

Fig.2 Wigner distributions of a circle and an annulus

The left side are the function products $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ and corresponding Wigner distributions of points 0, 1, 2, 3, 4 of the circle, and the right side are the function products $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ and corresponding Wigner distributions of points 1, 2, 3, 4, and 5 of the annulus

图3显示了方形的 Wigner 分布,点 0 为中心点 $(0, 0)$,点 1 到点 5 的坐标分别为 $(0, 0.5), (0, 1.0), (0, 1.5), (0, 2.0), (0, 2.5)$,它们的 Wigner 分布分别为 $W_f(0, 0.5; u, v), W_f(0, 1.0; u, v), W_f(0, 1.5; u, v), W_f(0, 2.0; u, v), W_f(0, 2.5; u, v)$,点 6 到点

10 的坐标分别为(0.5, 0.5)(1.0, 1.0)(1.5, 1.5), (2.0, 2.0)(2.5, 2.5), 它们的 Wigner 分布分别为 $W_f(0.5, 0.5; u, v)$, $W_f(1.0, 1.0; u, v)$, $W_f(1.5, 1.5; u, v)$, $W_f(2.0, 2.0; u, v)$, $W_f(2.5, 2.5; u, v)$, 由于方形本身的对称性, 点 0 的 Wigner 分布为其本身的傅里叶变换。

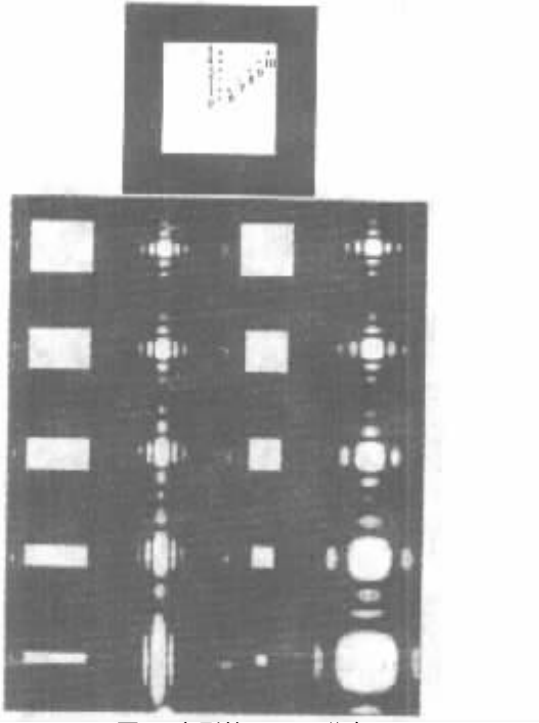


图 3 方形的 Wigner 分布

左侧图为方形上点 1, 2, 3, 4 和 5 的 $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ 和相应的 Wigner 分布, 右侧图为方形上点 6, 7, 8, 9 和 10 的 $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ 和相应的 Wigner 分布

Fig.3 Wigner distributions of square rectangle

The left side are the function products $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ and the corresponding Wigner distributions of points 1, 2, 3, 4, and 5 on the rectangle, and the right side are the function products $f(x + x'/2, y + y'/2)f^*(x - x'/2, y - y'/2)$ and the corresponding Wigner distributions of points 6, 7, 8, 9, and 10 on the rectangle

上述 Wigner 分布的计算, 取样点数 N, M 都取 1000 个点, Wigner 分布灰度图的灰度级为 2^{10} 即 1024 级灰度级。上述利用公式(8)模拟的二维实信号的 Wigner 分布的计算结果和文献[8]中用光学方法计算 Wigner 分布的结果相一致。

4 结 论

Wigner 分布函数同时能在空间域和频率域作为

编码信号的特征信息, 它可以应用于数字图像的处理过程中, 如对图像纹理特征的识别和统计归类, 航空摄影中不同地貌质地的识别^[7]等。

Wigner 分布函数还可以应用在一阶光学系统和部分相干光等其他领域中。光学中, Wigner 分布函数的研究, 具有极重要的意义。

本文阐述了 Wigner 分布函数的计算方法, 并模拟了一些孔径的 Wigner 分布, 理论结果和用光学方法产生 Wigner 分布函数的实验结果相吻合。

参 考 文 献

- 1 E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium [J]. *Phys. Rev.*, 1932, **40**: 749 ~ 759
- 2 M. J. Bastiaans. The Wigner distribution function applied to optical signals and systems [J]. *Opt. Comm.*, 1978, **25**(1): 26 ~ 30
- 3 M. J. Bastiaans. Wigner distribution function and its application to first-order optics [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(12): 1710 ~ 1716
- 4 M. J. Bastiaans. Wigner distribution function of partially coherent light [J]. *Optica Acta*, 1982, **29**(9): 1215 ~ 1224
- 5 D. Zalvidea, C. Colautti, E. E. Sicre. Quality parameters analysis of optical imaging systems with enhanced focal depth using the Wigner distribution function [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2000, **17**(5): 867 ~ 873
- 6 R. Simon, N. Mukunda. Optical phase space, Wigner representation, and invariant quality parameters [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2000, **17**(12): 2440 ~ 2463
- 7 G. Cristobal, J. Bescos, J. Santamaria. Image analysis through the Wigner distribution function [J]. *Appl. Opt.*, 1989, **28**(2): 262 ~ 271
- 8 R. Bamler, H. Glunder. The Wigner distribution function of two-dimensional signals coherent-optical generation and display [J]. *Optica Acta*, 1983, **30**(12): 1789 ~ 1803
- 9 M. Conner, Y. Li. Optical generation of the Wigner distribution of 2-D real signals [J]. *Appl. Opt.*, 1985, **24**(22): 3825 ~ 3829
- 10 K.-H. Brenner, A. W. Lohmann. Wigner distribution function display of complex 1D signals [J]. *Opt. Comm.*, 1982, **42**(5): 310 ~ 314