

文章编号: 0258-702X(2002)02-0113-06

# HF 激光器腔内气动介质有序扰动的数值模拟

许晓军, 陆启生, 袁圣付, 刘泽金

(国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

**提要** 通过对化学激光器腔内介质不均匀性的分析指出, HF 连续波化学激光器(CWCL)腔内的气动介质的有序不均匀扰动将是影响输出光束质量的主要因素之一。利用建立的激光器腔内二维折射率分布模型对基频和泛频 HF CWCL 有无激射条件下腔内气动介质的有序分布进行了数值计算。分析比较了 3-Slot(3S)和 2-Slot(2S)喷管结构的激光器的性能和气动介质对光束质量的影响。数值模拟指出, 在望远式非稳腔输出条件下, 腔内 1 m 喷管阵列的气动介质有序不均匀扰动对光束质量的影响不大, 但由于相位扰动的均方差将随喷管阵列长度的平方增大, 对于 HF 泛频输出尤应重视。另外, 3S 在工作性能和光束质量方面均优于 2S。

**关键词** HF 化学激光器, 不均匀性, 气动光学, 喷管, 数值计算

中图分类号 TN 248.5 文献标识码 A

## Numerical Simulation of Ordered Aero-optical Aberrations in Hydrogen Fluoride Chemical Lasers

XU Xiao-jun, LU Qi-sheng, YUAN Sheng-fu, LIU Ze-jin

(Institute of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

**Abstract** It was pointed out that the ordered aero-optical aberrations in Hydrogen Fluoride(HF) continuous wave chemical laser(CWCL)'s cavity is one of the main factors influencing laser beam quality by the analysis of the inhomogeneous medium in laser cavity. The 2D refractive index model in HF CWCL was set up to simulate the inhomogeneity distributions in main-tone/over-tone HF CWCL's cavities in the condition of power/zero-power output. With it, the performance and beam quality in 3-Slot(3S) and 2-Slot(2S) structure lasers were computed and analyzed. By the simulation, it was shown that the ordered aero-optical aberrations in the telescopic unstable cavity are not significant in nozzles array of 1 m length. But with the increase of the length of nozzles array, it will be important, especially for the over-tone HF lasers. In addition, the performance and beam quality of 3S are better than that of 2S.

**Key words** HF chemical laser, inhomogeneity, aero-optics, nozzle, numerical simulation

气动激光器(GDL)和化学激光器(CL)都是依靠化学反应来激励或产生粒子数反转的, 从而将化学能转变为相干的辐射能。其在燃烧点火方面与火箭有些类似, 而由于要求激发态分子的产生速率比去激活的速率快, 这样必须使激活介质保持在低温低压的环境中, 则激光器的燃烧室必须以相当小的单位热释放率运行, 因而象火箭中的不稳定的倾向很小。另外光腔中的光子流量要大, 空间分布要均匀, 激光腔内的反应速率要高等, 利用气动技术一定程度上解决了这些问题<sup>[1]</sup>。但气动技术的另一方面引

起的腔内流场密度的不均匀性, 是激光器获得高光束质量的最大障碍<sup>[1]</sup>。

对于 GDL 和连续波化学激光器(CWCL)而言, 由于激光腔内的 Reynolds 数( $Re = \rho u l / \mu$ , 其中  $\rho$ ,  $u$ ,  $l$ ,  $\mu$  分别表示气流的密度、特征速度、特征尺度和粘性系数)很大, 估算表明<sup>[2]</sup>, GDL 中  $Re \sim 10^5$ , CWCL 中更大。这说明在 GDL 和 CWCL 中气流的湍流是不可避免的。但腔内低密度、低温度水平, 腔内的湍流即随机不均匀性不是一个主要的问题, 低温超音速风洞的试验已经获得相对密度起伏为  $10^{-3}$

收稿日期 2000-08-18; 收到修改稿日期 2001-04-23

作者简介: 许晓军(1973.10—), 男, 江苏海门人, 讲师, 博士, 主要从事气动光学和大气光学研究。E-mail: xuxj@21cn.com

的数据可以说明<sup>3]</sup>。另外,模式介质相互作用也是引起随机不均匀性的重要因素,其不均匀性取决于腔内激活介质的密度。因而这种不均匀现象主要在具有高功率密度的脉冲激光器中出现<sup>4]</sup>。

与随机不均匀性相比,有序的扰动显得很重要。因为 GDL 和 CWCL 腔内的气流速度往往由超音速气流的绝热膨胀而达到低静止温度,借此来抽空低能级。另外利用膨胀时间远小于振动弛豫时间来冻结上能级粒子数,这样就需要非常细(几分之一毫米)的喷管口。从而,由喷管引起的激波和边界层以及相邻喷管的形成的混合层是引起有序扰动的主要因素。

Hydrogen Fluoride(HF) CWCL 作为一种比较成熟的 CL,已经得到了广泛的研究与应用<sup>[5-7]</sup>。作为 CWCL 的重要组成部分,喷管在相当程度上直接影响着激光器的性能,当然也直接影响着输出光束的质量。近年来各种喷管组件得到了广泛的研究<sup>[7,8]</sup>。

$$\text{连续方程} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量方程} \quad \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} + p \hat{E} - \hat{\tau}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{能量方程} \quad \frac{\partial (\rho H - p)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H + \vec{q} - \hat{\tau} \cdot \vec{u}) + \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i I_i = 0 \quad (3)$$

$$\text{组份方程} \quad \frac{\partial \rho c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} c_i + \vec{J}_i) - \sum_{j=1}^{N_R} w_{ij} + w_{\text{rad}} = 0, j = 1, 2, \dots, N_k \quad (4)$$

$$w_{\text{rad}} = \begin{cases} \frac{m_{\text{rad}}}{h N_A} \left( \frac{\alpha_{j-1} I_{j-1}}{\nu_{j-1}} - \frac{\alpha_j I_j}{\nu_j} \right) & j = 1, 2, \dots, N_v + 1 \\ 0 & j = N_v + 2, \dots, N_k \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{状态方程} \quad p = \rho RT/m \quad H = h + u^2/2 \quad (5)$$

其中  $\rho, \vec{u}, h, H, p, m, T$  分别表示混合气体的密度、平均速度、比焓、总比焓、静压力、分子质量和温度;  $h, N_A, R, \hat{E}$  分别为 Planck 常数、Avogadro 常数、普适气体常数和单位张量;  $N_k, N_R, N_v$  分别为体系中的总组份数、化学反应数和激射分子所处的最高能级;  $\hat{\tau}, \vec{q}, \vec{J}_i$  分别为应力张量、热通量矢量和质量通量矢量;  $m_{\text{rad}}, \alpha_j, I_j, \nu_j$  分别为激射分子的分子质量和激射分子在振动能级间的跃迁增益系数、激射强度和跃迁频率;  $c_i, w_{ij}$  为组份  $i$  的质量百分比和第  $j$  个化学反应中的生成速率。

方程(1)~(5)描述了激光腔内流场。对于喷管流场,方程(3)中的有关  $I_i$  的辐射项为零。另外上述辐射项是针对基频跃迁而言的,对于泛频跃迁,辐射项要加以修正<sup>9]</sup>。

鉴于以上的讨论,建立了以描述激光器流场的 Navier-Stokes 方程组<sup>[9]</sup>为基础的激光腔内的二维折射率分布模型,求解激光腔内稳定流场的有序扰动介质的分布。燃烧驱动 HF CWCL 的基本原理和计算模型已经有了详细的阐述<sup>[9,10]</sup>。

## 1 物理模型及方程

激光器内气体流场的描述可以用流体动力学 Navier-Stokes 方程组描述。利用下列基本假设<sup>[9]</sup>: 1) 流体为连续介质; 2) 混合的气体的体粘性和热扩散可以忽略; 3) HF 激射分子的每个振动态为独立的化学组份; 4) 振动弛豫和化学体系动力学过程都是基元化学反应动力学过程; 5) 自发辐射和多光子辐射可以忽略; 6) 各振动能级上转动粒子数为 Boltzmann 分布; 7) 激射跃迁满足“J 位移”模型。激光器内矢量形式的多组份有化学反应和激光辐射的混合气体流场的 Navier-Stokes 方程组描述如下:

燃烧驱动 HF CWCL 具有典型的跨音速流场<sup>9]</sup>。

对于上述方程的求解,传统的求解 Navier-Stokes 方程组数值积分方法表明,若流场存在亚音速流,计算格式往往不收敛。Y. Egorov 发展的可压缩比例方法<sup>9]</sup>(Compressibility Scaling Method—CSM)有效地解决了激光器内的超音速流场问题。

由于计算内容的差别和控制方程的不同,整个流场的计算分喷管(氧化剂喷管、惰性气体喷管和燃料喷管)和光腔(包括喷管流场的超音速区)两部分,如图1给出的平面对称二维 3-Slot 喷管(以下简称 3S)单基元。流场沿  $x$  轴方向,喷管沿  $z$  轴方向周期排列。由于喷管的周期性排列使得流场的解同样具有周期性,计算中选取上下两喷管中心线所围区域为流场计算基元。同时认为流场在喷管高度  $y$  方向均匀分布,因而计算简化为  $(x, z)$  的二维问题。2-

Slot 喷管(以下简称 2S)模型的处理与此相同。

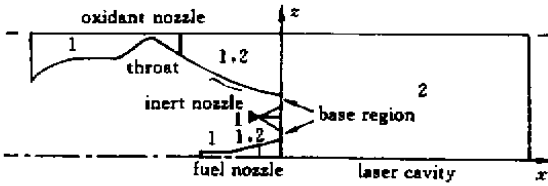


图 1 3-Slot 喷管结构 HF 激光的计算基元及网格

1 为喷管计算区 2 为光腔计算区

Fig.1 Calculation region and meshes of 3-Slot nozzle HF laser

1: for nozzle region, 2: for cavity region

另外,计算区域必须给定合理的边界条件和初值条件。实际计算中喷管流场的边界条件为对称边界、亚音速入口边界和超音速出口边界。光腔流场的不同之处为超音速入口边界。喷管的初值条件通常取方程组的一维解析解,光腔流场的初值设为均匀值。计算采用 CSM 方法,从方程(1)~(5)中选择与 Mach 数无关的变量将方程改为无量纲非守恒形式。计算采用有限差分格式,网格随喷管形状自适应疏密。

通过对 Navier-Stokes 方程组的数值求解,可以得到激光腔内各种组份的密度分布。利用 Gladstone-Dale 定理可以直接计算出腔内一个基元对应的折射率分布

$$n(x, z) = 1 + \sum_{i=1}^{N_k} \kappa_i \frac{\rho_i(x, z)}{\rho_0} \quad (6)$$

表 1 喷管几何结构参数

Table 1 Geometric parameters of each nozzle

	Oxidant nozzle	Inert nozzle	Fuel nozzle
Half width of throat/mm	0.25	0.1	0.2
Ratio of area	11.5	6	4.375
Length of supersonic region/mm	6	1	2.5
High/cm	10	10	10
Width of base region/mm	0.5		0.4

表 2 燃烧室内反应产物及喷管参数

Table 2 Inlet parameters of each nozzle

	Chamber	Inert nozzle	Fuel nozzle
Temperature/K	2039	300	300
Wall temperature/K	300	300	300
Pressure/ $10^5$ Pa	0.9	0.3	0.6
Percent of each component/%	H(29.803), F <sub>2</sub> (0.029) He(29.592), DF(41.576)	He(100)	H <sub>2</sub> (100)

式中  $\kappa_i$  为质量密度与折射率的关系常数,  $\rho_0$  为参考密度。

由于基元的周期排列,假定基元的宽度为  $d$ ,喷管阵列长度为  $L$ ,喷管组数为  $N = L/d \gg 1$ ,则通过激光腔一次的光场波前扰动为

$$W(x) = N \int_0^d n(x, z) dz \quad (7)$$

考虑一宽度为  $D$  的方形光束,则单次通过介质的光场相位扰动的均方相位差  $\Phi^2$  为

$$\Phi^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \frac{1}{D} \int_{x_0}^{x_0+D} \left[ W(x) - \frac{1}{D} \int_{x_0}^{x_0+D} W(x) dx \right]^2 dx \quad (8)$$

则扰动光场在远场的光束质量因子  $\beta^{[11]}$  在波前起伏(扣除波前倾斜)很小的条件下,近似为<sup>[12]</sup>

$$\beta = 1 + \Phi^2 \quad (9)$$

## 2 运行参数

图 1 给出了一种典型的 3S HF CWCL 单基元几何结构,表 1 给出了对应的等效几何结构参数。腔轴方向喷管阵列长度为  $L = 1$  m。数值计算中,燃烧室内气体混合反应后即氧化剂喷管入口的压力、温度及组份的质量百分比见表 2。燃料和惰性气体喷管的入口气流参数见表 2。为了研究激射对腔内介质不均匀性的影响,为简单起见,我们采用了平面平行腔模型,模型的参数见表 3,采用一面腔镜耦合输出,另一面为全反镜。

表 3 平行平面腔参数

Table 3 Parameters of cavity mirrors

Reflection coef. $R_1$	Absorption coef. $AB_1$	Reflection coef. $R_2$	Absorption coef. $AB_2$
1.000	0.000	0.850	0.002

为了便于与 3S 结构的激光器比较,2S 只在 3S 的结构上减去了惰性气体喷管,如图 2。氧化剂喷管和燃料喷管的几何结构参数、入口参数及平行平面腔参数同 3S。其中氧化剂喷管和燃料喷管之间的基区宽度为 0.4 mm。而泛频激光输出和基频输出利用同样的化学反应产生相同的粒子数反转,利用光学元件允许泛频谱线激射跃迁( $\Delta V = 2$ )发生

的同时,抑制基频谱线( $\Delta V = 1$ )的激射。由于 HF 泛频激光器输出谱线( $\lambda = 1.32 \mu\text{m}$ )在传输特性和与材料相互作用上的优势,近年来很受重视<sup>[5,6]</sup>。D. L. Carroll 指出<sup>[13]</sup>,对 HF 基频激光器的试验条件也比较适合 HF 泛频激光器。因而数值模拟时,喷管几何结构和入口参数同表 1.2。仅仅对输出镜的参数进行了修改,如表 4。

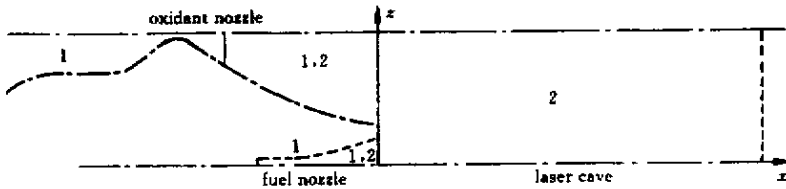


图 2 2S 喷管结构 HF 激光的计算单元

Fig.2 Calculation region of 2S nozzle HF laser

表 4 平行平面腔参数

Table 4 Parameters of cavity mirrors

Reflection coef. $R_1$	Absorption coef. $AB_1$	Reflection coef. $R_2$	Absorption coef. $AB_2$
1.000	0.000	0.998	0.000

### 3 数值计算

#### 3.1 3S 与 2S 的比较

在上述模型和运行参数条件下,利用 CSM 方法对激光器及腔内的流场进行了数值模拟。图 3 给出了 3S 和 2S 的转动跃迁  $J = 7$  的  $v(2-1)$  支谱线的单基元零功率输出(无激射)增益区的二维分布。可以看出,3S 的增益区大约在流场方向的(2 cm <  $x$  < 9 cm)区域,而 2S 增益区紧靠喷管出口,大致位置为(0 cm <  $x$  < 3 cm)区域。2S 虽然增益区域小,但其增

益值比 3S 要大,因而增益区的不均匀性比较大。由于增益区决定激光输出的工作区,尽管各支谱线的增益区略有不同,而在本文不均匀介质对光场扰动的讨论中 2S 为(0 cm <  $x$  < 3 cm),3S 为(2 cm <  $x$  < 9 cm)区域。

图 4 给出了激光腔内由 2S 和 3S 的单基元引起的无激射时的二维折射率分布。计算说明,折射率除喷管出口外,总体上沿流场方向增大,对光场扰动体现为对波前的倾斜。在喷管出口处(0 <  $x$  < 1

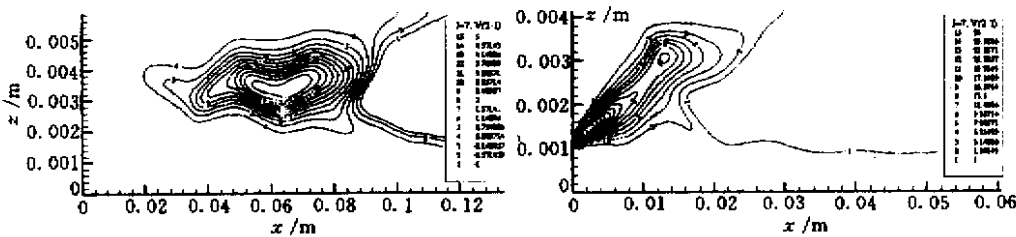


图 3 3S 和 2S 激光腔内的增益区分布

Fig.3 Gain distributions in laser cavities of 3S and 2S

cm) 折射率的起伏相当大。而  $2S(1\text{ cm} < x < 4\text{ cm})$ ,  $3S(1\text{ cm} < x < 8\text{ cm})$  区域折射率有比较大的波动。图 5 给出了 2S 和 3S 的单基元折射率分布对单程波前扰动的比较。而造成波前的总体沿流场倾斜的主

要原因是超音速气流到达激光腔后流速下降,如图 6 给出的腔内平均 Mach 数沿流场的分布,从而导致沿流场方向的介质密度升高,折射率增大。

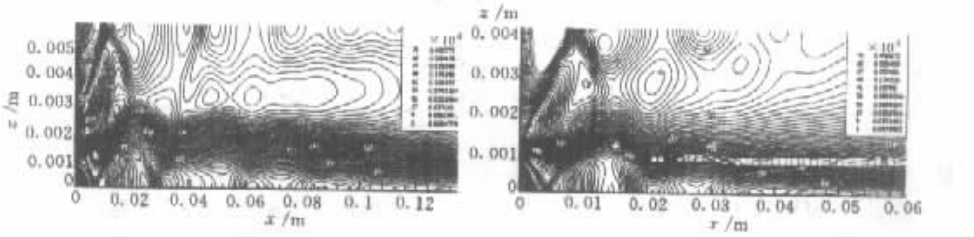


图 4 3S 和 2S 激光腔内的折射率分布

Fig.4 Refractive index distributions in laser cavities of 3S and 2S

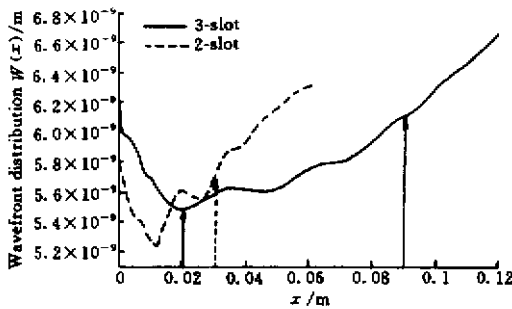


图 5 3S 和 2S 波前扰动比较

Fig.5 Wavefront distributions of 3S and 2S

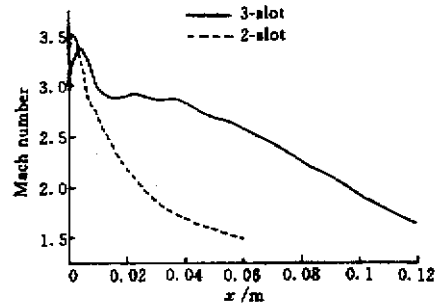


图 6 3S 和 2S 激光腔内的平均 Mach 数

Fig.6 Average Mach number of 3S and 2S

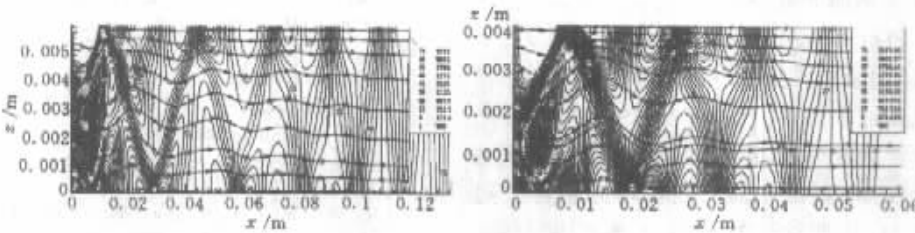


图 7 3S 和 2S 激光腔内的压力分布及流线图

Fig.7 Pressure distributions and streamlines of 3S and 2S

而对于喷管出口处 ( $0 < x < 1\text{ cm}$ ) 的波前大起伏和  $2S(1\text{ cm} < x < 4\text{ cm})$ ,  $3S(1\text{ cm} < x < 8\text{ cm})$  区域波前较大的波动,却是由喷管引起的激波和边界层以及相邻喷管间形成的混合层所致。从图 7 3S 和 2S 腔内的压力分布可以看出,在喷管出口区域存在相当复杂的波系,比较清晰的有一很强的斜激波和一 Mach 盘。而在  $2S(1\text{ cm} < x < 4\text{ cm})$ ,  $3S(1\text{ cm} < x < 8\text{ cm})$  区域,存在着随流场方向逐渐减弱的激波,并且 2S 的激波强度大于 3S。这是导致 2S 的波前扰动大于 3S 的一个原因。从流线图也可以看出,2S 的两喷管流之间的混合较 3S 迅速,而 3S 的喷管流之间的混合主要还是以扩散混合为主。

### 3.2 不均匀介质对输出光束质量的影响

下面就以上所讨论的 HF CWCL 介质有序波前扰动进行比较。喷管阵列长为  $L = 1\text{ cm}$ ,对于 3S 和 2S 基元数  $N$  分别为 170 和 240。喷管工作区宽度根据零功率增益区长度确定,3S 选取为  $2 \sim 9\text{ cm}$ ,2S 选取为  $0 \sim 3\text{ cm}$ 。考虑到一般望远式非稳腔条件下,输出主镜上的几何模为平面波,若腔的横向几何放大率大于 1,则输出主镜上激光的光场相位分布小于光场在腔内气动介质中往返一次的扰动<sup>[14]</sup>,则计算中考虑光场的二倍单程介质扰动。表 5 给出了 HF CWCL 在基频和泛频及有无激射条件下的最大相位方差和波前倾斜及远场光束质量因子  $\beta$ 。

表 5 不均匀介质对输出光束质量影响的比较

Table 5 Comparison of beam qualities in different laser systems

	Output	Nozzle	$\Delta W_{\text{rms}}/\mu\text{m}$	$\Delta\Phi_{\text{rms}}$	$\beta$	Tilt <sub>max</sub> /μrad
Main-tone (2.7 μm)	Y	3-Slot	0.0426	0.0991	1.010	1.984
		2-Slot	0.0680	0.1581	1.025	-4.000
Over-tone (1.32 μm)	Y	3-Slot	0.0584	0.1358	1.018	2.714
		2-Slot	0.0488	0.2322	1.054	2.266
			0.0621	0.2956	1.087	-4.436

### 3.3 小结

从计算结果看,可以得出以下结论:

1) 气动介质有序不均匀性对望远式非稳腔激光输出的光束质量影响不大,尤其对于长波长激光输出的影响更小,而对于短波长激光的输出影响较大。这在泛频 HF 激光的研制中应加以重视。气动介质对激光单程扰动较小的主要原因是,激光腔内的工作温度(300 K)和压力(1000 Pa)较低,由状态方程可知,腔内的工作介质的密度很低,约为大气密度的 1%。因而尽管腔内的温度、压力起伏较大,而密度起伏并不大,同样折射率起伏也不大。但这种扰动即便在非稳腔结构中,由于有序扰动的相位方差正比于传输距离的平方,随着激光器喷管阵列的增长也会对激光输出产生较大的影响。比如,对于 3S 泛频 HF 基频激光器,喷管阵列长为 2 m 时,有序扰动导致的相位均方差将达到  $\Phi_{\text{rms}}^2 = 0.21$ 。

2) 3S 结构激光器的不均匀介质扰动无论是相位均方差还是波前倾斜,均远小于 2S 结构的激光器。进一步计算表明,如果将 2S 的工作区增大到 6 cm,则对于 HF 泛频激光器的相位均方差将达到  $\Phi_{\text{rms}}^2 = 0.41$ 。因而对于 2S 来说,介质不均匀性的影响比较大。主要原因是:一般喷管出口的介质不均匀性比较大,而 3S 采用惰性气体喷管阻隔了化学反应在喷管的出口产生,使得增益区不再紧靠喷管出口,激光输出的工作区后移,避开了喷管出口的强不均匀性。另外由于惰性气体喷管中的 He 的去激活反应速率较  $\text{N}_2$  低,有利于受激辐射的产生<sup>[10]</sup>。且惰性气体喷管的稀释作用使化学反应平缓,使腔内温度、压力相对较低,有利于粒子数反转,因而 3S 激光腔内的激活区长度较长,增益值较小,有较好的均匀性,提高了输出光束质量;而 2S 的增益区紧靠喷管口,增益区长度短,但在增益最大值处,不均匀性也大。故无论从激光输出的光强分布,还是相位分布上来看,3S 都有一定的优越性,3S 的输出光束

质量要优于 2S。

3) 激射作用会减小介质的不均匀性,但影响不大。因而在无激射条件下对腔内介质不均匀性的测量可以近似地反映出激射条件下介质不均匀性引起的光束质量下降。

### 参 考 文 献

- 1 A. E. Fuhs. Overview of aero-optical phenomena [ J ]. *SPIE*, 1981, **293**: 36 ~ 55
- 2 V. L. Moshkov. Spatial and temporal scales of active medium inhomogeneous in high power gas lasers [ C ]. R. Kossowsky *et al.* ( eds. ), *High Power Lasers-Science and Engineering*, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. 47 ~ 82
- 3 G. W. Sutton. Aero-optical foundations and applications [ J ]. *AIAA J.*, 1985, **23**( 10 ): 1525 ~ 1537
- 4 G. W. Sutton. Influence of the turbulent pulsation of the optical active medium on the light beam [ J ]. *AIAA J.*, 1969, **7**( 9 ): 94 ~ 103
- 5 W. A. Duncan, S. P. Patterson, B. R. Graves. Overtone research, advanced chemical laser module design [ C ]. *SPIE*, 1994, **2119**: 47 ~ 58
- 6 R. E. Waldo. Advanced cw hydrogen fluoride chemical laser performance [ C ]. *SPIE*, 1993, **1871**: 252 ~ 264
- 7 S. W. Zelazny, W. A. Chambers, W. F. van Tassell *et al.*. Medium induced phase aberrations in continuous wave ( cw ) hydrogen fluoride chemical lasers [ C ]. *SPIE*, 1981, **293**: 126 ~ 132
- 8 R. W. Gross, J. F. Bott. *Handbook of Chemical Lasers* [ M ]. New York: John Wiley & Sons, 1976. 267 ~ 272
- 9 Y. Egorov. Navier-Stokes Modeling of 2D and 3D Reactive Flow on the Basis of Compressibility Scaling Method [ M ]. Germany: Stuttgart, 1994. 815 ~ 820
- 10 Hua Weihong, Jiang Zhongfu, Zhao Yijun. Numerical study of the 3-slot CW HF chemical laser [ J ]. *Chinese J. Lasers* ( 中国激光 ), 1997, **A24**( 3 ): 221 ~ 227 ( in Chinese )
- 11 Liu Zejin, Lu Qisheng, Zhao Yijun. Study of evaluating beam quality of high energy lasers with unstable resonators [ J ]. *Chinese J. Lasers* ( 中国激光 ), 1998, **A25**( 3 ): 193 ~ 196
- 12 E. L. O'Neil. *Introduction to Statistical Optics* [ M ]. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963. 88
- 13 D. L. Carroll. Experimental and theoretical study of CW HF chemical laser overtone performance [ D ]. UMI Dissertation Service, University of Southern California, 1996
- 14 Y. A. Ananyev. Optical Resonators and the Problem of the Laser Radiation Divergence [ M ]. Moscow: Nauka, 1979