

文章编号: 0258-7025(2002)11-1000-06

四路激光跟踪三维坐标测量系统最佳布局

林永兵, 张国雄, 李 真, 李杏华

(天津大学精密仪器与光电子工程学院 精密测试技术及仪器国家重点实验室, 天津 300072)

提要 四路激光跟踪三维坐标测量系统的测量精度在很大程度上取决于四路干涉仪的布局。系统地研究了四路激光跟踪三维坐标测量系统的布局优化问题, 以被测点的位置几何精度衰减因子(PDOP)最小为目标进行优化, 得到了三种系统最佳测量布局。考虑到系统自标定对布局的要求以及目标靶镜接收角范围的限制, 得到了一种具有实用价值的系统最佳布局。

关键词 激光跟踪系统, 坐标测量, 位置几何精度衰减因子, 布局, 优化

中图分类号 TH 721 文献标识码 A

Optimal Arrangement of Four-beam Laser Tracking System for 3D Coordinate Measurement

LIN Yong-bing, ZHANG Guo-xiong, LI Zhen, LI Xing-hua

(State Key Laboratory of Precision Measurement Technology & Instruments, College of Precision Instrument & Opto-electronics Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract The measuring accuracy of four-beam laser tracking system for 3D coordinate measurement in large degree depends on the arrangement of the interferometers. In this paper the arrangement of four laser tracking interferometers is discussed, and three kinds of the optimal arrangements of four laser tracking interferometers are obtained through minimizing the position dilution of precision of the measured point. One of those arrangements of four laser tracking interferometers is considered as the most reasonable arrangement according to the limited receiving angle of the cat's-eye and the restriction on the arrangement in the process of system self-calibration.

Key words laser tracking system, coordinate measurement, position dilution of precision, arrangement, optimization

1 引 言

多路激光跟踪三维坐标测量系统以其自身的一系列优点如自标定、高精度、大范围、柔性、动态、现场测量等, 在工业测量领域中有着极为广阔的应用前景。多路激光跟踪三维坐标测量系统既有三坐标测量机 CMM 的通用性, 也有着经纬仪的大范围、现场测量的优点, 更重要的是, 基于多边法原理的激光跟踪坐标测量系统有着更高的精度潜力。首先, 系统不用测量角度量, 只需测量长度量, 而对长度的测量是基于激光干涉原理的, 把激光波长这个最高标准直接传递给被测对象; 其次, 每一路激光跟踪干涉

仪测量原理符合 Abbe 原则, 因此可以期望基于多边法原理和激光干涉测距的坐标测量系统有着比三坐标测量机更高的精度。但目前该系统实际测量精度普遍低于理论精度^[1], 一个重要的原因就是系统的布局不合理。多路激光跟踪坐标测量系统在实际应用时包括两个过程: 系统自标定和实际测量, 因而系统的最终精度也就取决于这两个过程, 而在系统自标定和实际测量两个过程中, 各路激光跟踪干涉仪的布局 and 测点的选取对它们的影响很大, 不合理的布局甚至会导致基于激光干涉原理的高精度测量失去意义。因此, 研究系统的布局优化是一项非常有意义的工作。文献[2, 3]仅研究了系统自标定时

收稿日期 2001-08-06; 收到修改稿日期 2001-12-10

基金项目 国家自然科学基金(编号 59875064)资助项目。

作者简介 林永兵(1974—), 男, 天津大学测试计量技术及仪器专业博士研究生。E-mail linyongbing@eyou.com

的布局限制,并没有研究系统的最佳布局。本文系统地研究了四路激光跟踪三维坐标测量系统的布局优化问题,并得到了系统的最佳布局。

2 系统测量原理

四路激光跟踪干涉仪组成的三维坐标测量系统如图 1 所示。图中的 $B_i (i = 1, \dots, A)$ 表示每路干涉仪双轴跟踪转镜的中心,定义为测量系统的基点,系统建立后各基点位置须保证稳定不变。 T 为目标镜“猫眼”的中心位置,定义为测量系统的动点。目标镜可以在三维空间内运动,每一路激光跟踪干涉仪实时跟踪目标镜的运动并测出目标镜到跟踪转镜中心的相对长度变动量。当采用三路激光跟踪干涉仪共同瞄准并跟踪三维空间某一运动目标时,如果动点到基点的初始长度已知,动点到基点的距离也就可以求得,那么,只要三个基点的位置关系已知,空间运动目标的位置也就唯一确定了。这就是三边法测量原理。

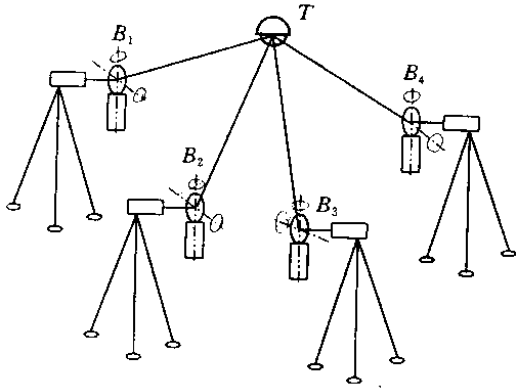


图 1 四路激光跟踪三维坐标测量系统

Fig. 1 Four-beam laser tracking system for 3D coordinate measurement

在三路激光跟踪测量系统基础上,再增加一路跟踪干涉仪,构成冗余系统,那么不仅可以提高系统工作可靠性和系统测量精度,而且可以实现系统的自标定^[4]。对于每一动点,按两点距离公式,与 4 个基点可以建立 4 个方程,而每引进一个动点,只增加 3 个未知坐标,可见存在一个冗余约束方程。只要增加动点数,使冗余约束方程个数大于或等于系统未知参数个数,就可以对系统进行标定。这就是系统自标定的原理。系统的未知参数应当包括 4 个基点以及 1 个初始动点的位置坐标^[5],未知数共 $3 \times (4 + 1) = 15$ 个,通过合理建立坐标系,可以使系统

未知参数减少为 9 个,因此为完成系统自标定,动点数至少为 9 个。为下文叙述方便,将 4 个基点和 1 个初始动点的位置坐标统称为系统参数。

一般说来,四路激光跟踪坐标测量系统在实际应用时,首先要经过系统自标定,确定出系统位置参数,然后再进行实际测量。显然,四路激光跟踪干涉仪的布局是否合理将会直接影响系统自标定和实际测量的精度。我们首先研究测量时的最优布局问题,然后研究最佳测量布局对系统自标定的影响,最后综合得到系统的最合理布局。

3 测量时的最佳布局

测量时的最优布局问题是:对三维空间某一被测点,4 个基点如何布置才可以使长度变动量测量误差对该点的位置测量精度影响最小。这里假设系统参数是已知的。

3.1 坐标求解

在图 1 中,空间任一动点 $T(x, y, z)$ 按两点距离公式,相对于 4 个基点可以建立如下方程组

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} = L_i + l_i \quad i = 1, 2, \dots, A$$

式中 (x_i, y_i, z_i) 为第 i 个基点 B_i 的坐标, L_i 为基点 B_i 到初始动点 T_0 的初始长度,系统参数确定后,这两者均可认为已知; l_i 为动点 T 相对于基点 B_i 的长度变动量,也即激光跟踪干涉仪的测量值 (x, y, z) 为动点坐标,是待求量。

上式中未知数只有 3 个,而方程有 4 个,故可按最小二乘原理进行求解。记残差为

$$\nu_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - L_i - l_i$$

上式为非线性方程,需要线性化。取动点的概略坐标为 (x^0, y^0, z^0) ,相应改正数为 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,则有: $x = x^0 + \Delta x$; $y = y^0 + \Delta y$; $z = z^0 + \Delta z$,故只要求出改正数 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ 就可求得动点坐标。将上式按 Taylor 级数展开并略去高阶项,可得到如下线性方程组

$$\nu_i = \rho_i^0 + e_i^x \Delta x + e_i^y \Delta y + e_i^z \Delta z - L_i - l_i \quad i = 1, 2, \dots, A \quad (1)$$

式中,

$\rho_i^0 = \sqrt{(x^0 - x_i)^2 + (y^0 - y_i)^2 + (z^0 - z_i)^2}$ 为动点 T 到基点 B_i 的近似距离 $(e_i^x, e_i^y, e_i^z)^T$ 为动点 T 到基点 B_i 的单位矢量 e_i 的方向余弦,有

$$\begin{cases} e_i^x = \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x} \right)_{(x^0, y^0, z^0)} = \frac{x_i - x^0}{\rho_i^0} \\ e_i^y = \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial y} \right)_{(x^0, y^0, z^0)} = \frac{y_i - y^0}{\rho_i^0} \\ e_i^z = \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial z} \right)_{(x^0, y^0, z^0)} = \frac{z_i - z^0}{\rho_i^0} \end{cases}$$

式(1)写成矩阵形式

$$V = AX - B$$

式中

$$V = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} e_1^x & e_1^y & e_1^z \\ e_2^x & e_2^y & e_2^z \\ e_3^x & e_3^y & e_3^z \\ e_4^x & e_4^y & e_4^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ e_2^T \\ e_3^T \\ e_4^T \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} L_1 + l_1 - \rho_1^0 \\ L_2 + l_2 - \rho_2^0 \\ L_3 + l_3 - \rho_3^0 \\ L_4 + l_4 - \rho_4^0 \end{bmatrix}$$

按最小二乘原理 $V^T V = \min$ 组成法方程

$$A^T A X = A^T B$$

由此可解得未知数

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

求出 $X = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$ 后,可按式求得动点坐标

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

给出的动点概略坐标 (x^0, y^0, z^0) 离真值可能有较大误差,这样在进行方程线性化时略去高阶项会引起线性化误差,从而引起未知参数解算误差。此时,可以利用迭代法进行解算,即得到第一次解后,用它作为近似值再重新按上述方法解算。经过多次迭代,一般可以获得满意的结果。

3.2 精度估计

下面对求得的未知量进行精度估计。

3.2.1 相对长度变动量测量值标准差 σ_l

各路激光跟踪干涉仪对长度变动量的测量可以视为独立等精度测量,所以,长度变动量测量值标准差就是单位权测量值标准差

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{V^T V}{4-3}} = \sqrt{V^T V}$$

3.2.2 未知参数的协方差矩阵

设 $\text{Cov}(L)$ 表示长度变动量测量值的协方差矩

阵,由于相对长度变动量测量可视为独立等精度测量,则有 $\text{Cov}(L) = I\sigma_l^2$,其中 I 为单位阵。

未知参数 $X = [\Delta x \ \Delta y \ \Delta z]^T$ 的协方差阵

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X) &= (A^T A)^{-1} A^T \text{Cov}(L) (A^T A)^{-1} A^T]^T = \\ &= (A^T A)^{-1} A^T I \sigma_l^2 (A^T A)^{-1} A^T]^T = \\ &= (A^T A)^{-1} \sigma_l^2 = Q_X \sigma_l^2 \end{aligned}$$

式中, Q_X 为未知参数的协因数阵

$$Q_X = (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

协方差阵 $\text{Cov}(X)$ 的主对角元素就是各个未知参数 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的方差。由此可以得到动点坐标分量的方差估计值

$$\sigma_x^2 = Q_{11} \sigma_l^2, \sigma_y^2 = Q_{22} \sigma_l^2, \sigma_z^2 = Q_{33} \sigma_l^2$$

动点的位置测量精度(标准差)可定义为 $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}} \cdot \sigma_l$, 式中 Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} 是矩阵 Q_X 的主对角元素。由此可知,动点坐标的测量精度取决于两个因素:一是相对长度变动量测量精度 σ_l ,也即激光跟踪干涉仪的测量精度;二是权系数 Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} ,它们是由系数矩阵 A 按(2)式计算得到的,因而它们取决于系数矩阵 A ,而 A 是由一系列方向余弦构成的, A 仅与动点到各个基点的单位矢量有关,而与激光跟踪干涉仪的测量精度无关。

我们定义仅与几何因素有关的量 $\sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}}$ 为动点三维位置的几何精度衰减因子,并用符号 PDOP 表示,即 $\text{PDOP} = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}}$,故 $\sigma = \text{PDOP} \cdot \sigma_l$ 。由此可见,几何精度衰减因子实际上就是误差放大因子。这样,系统测量布局优化问题就转化为求几何精度衰减因子 PDOP 的极小值问题。PDOP 与动点和 4 个基点的布局有关,若在某种布局下,PDOP 取得最小值,就可认为这种布局是最优的。

3.3 最佳测量布局^[6,7]

先不考虑猫眼接收角范围的限制来讨论最佳测量布局问题。

由上面的讨论可知,几何精度衰减因子 PDOP 与动点到基点的距离以及坐标系的选取均无关,因此,为简化计算过程,建立了如下坐标系:以被测点 o 为原点,单位矢量 e_1 落在 x 轴上, e_2 落在 x, y 轴组成的平面内,如图 2 所示。图中 e_1, e_2, e_3, e_4 分别代表被测点 o 到各个基点 B_i 方向的单位矢量。 e_i 在

x, y, z 三轴上的投影(即方向余弦)分别记为 l_i , m_i, n_i , 不妨设 $m_2 \geq 0$ 。有如下关系式成立

$$l_2^2 + m_2^2 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = l_4^2 + m_4^2 + n_4^2 = 1 \quad (3)$$

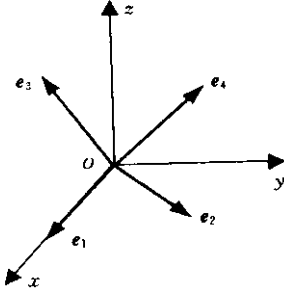


图 2 简化的坐标系

Fig.2 Simplified cartesian coordinates

系数矩阵 A 可表示为

$$A = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix}$$

由协因数矩阵

$$Q_X = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1}$$

可求得

$$Q_{11} = [(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)(n_3^2 + n_4^2) - (m_3 n_3 + m_4 n_4)^2] \text{de}(A^T A)$$

$$Q_{22} = [(1 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(n_3^2 + n_4^2) - (l_3 n_3 + l_4 n_4)^2] \text{de}(A^T A)$$

$$Q_{33} = [(1 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) - (l_2 m_2 + l_3 m_3 + l_4 m_4)^2] \text{de}(A^T A)$$

式中 $\text{de}(A^T A)$ 表示矩阵 $A^T A$ 的行列式, 则几何精度衰减因子可由下式求得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

或

$$\text{PDOP} = \sqrt{Q_{11} + Q_{22} + Q_{33}} = \sqrt{C/D}$$

其中

$$C = (m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)(n_3^2 + n_4^2) - (m_3 n_3 + m_4 n_4)^2 + (1 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(n_3^2 + n_4^2) - (l_3 n_3 + l_4 n_4)^2 + (1 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)(m_2^2 + m_3^2 + m_4^2) - (l_2 m_2 + l_3 m_3 + l_4 m_4)^2$$

$$D = \text{de}(A^T A)$$

为了研究在(3)式条件下求 PDOP 的最小值问题, 引入带拉格朗日待定系数(λ_2, λ_3 和 λ_4)的函数 F

$$F = C/D + \lambda_2(l_2^2 + m_2^2 - 1) + \lambda_3(l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 - 1) + \lambda_4(l_4^2 + m_4^2 + n_4^2 - 1)$$

将函数 F 对 l_2 求导, 并令其为零, 可得

$$F_{l_2} = \frac{C_{l_2} D - C D_{l_2}}{D^2} + 2\lambda_2 l_2 = 0$$

式中, 脚注 l_2 表示对该变量求偏导数。

对其他变量求导, 也可得到类似的形式, 可写成如下统一的形式

$$F_s = \frac{C_s D - C D_s}{D^2} + 2\lambda_i s = 0 \quad (4)$$

$$s = l_2, l_3, l_4, m_2, m_3, m_4, n_3, n_4$$

$i = 2$, 当 $s = l_2, m_2$ 时;

$i = 3$, 当 $s = l_3, m_3, n_3$ 时;

$i = 4$, 当 $s = l_4, m_4, n_4$ 时。

从(4)式中消去系数 λ_2, λ_3 和 λ_4 可得

$$(m_i C_{l_i} - l_i C_{m_i})D - (m_i D_{l_i} - l_i D_{m_i})C = 0 \quad i = 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$(n_i C_{l_i} - l_i C_{n_i})D - (n_i D_{l_i} - l_i D_{n_i})C = 0 \quad i = 3, 4 \quad (6)$$

对(3)(5)和(6)三式联立求解, 可得使 PDOP 值最小的如下形式的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad (8)$$

或

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

经计算可知,以上各组解对应的几何精度衰减因子 PDOP = 1.5。

上述方程组还有其他形式的解,如 $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{但此时对应的 PDOP} = 1.5275,$$

不是最小值,因此不能作为最优布局。

式(7)给出的几何图形如图3中(a)所示。图中4个单位矢量 e_1, e_2, e_3, e_4 为动点到基点方向的单位矢量,矢量端点分布在一个以被测点 O 为球心,1为半径的球面上。任何两个矢量之间的夹角均为 $\theta = 109.47^\circ$,矢量端点构成的几何图形为正四面体。这种布局已经由文献[5]指出。由图可见,在

这种布局下,被测点落在正四面体的内部,为实现测量必须要求猫眼接收角范围达到 360° ,但实际上猫眼接收角最大只有 180° ,因此这种布局不可能实现。

式(8)给出的几何图形如图3中(b)所示。图中相邻两矢量之间的夹角均为 $\theta = 70.53^\circ$,相对两矢量(e_1 与 e_3, e_2 与 e_4)之间的夹角均为 109.47° 。矢量端点与动点组成的几何图形为等腰五面体,该五面体每个侧面的顶角均为 70.53° ,底面为正方形。显然4个单位矢量端点落在同一平面内,考虑到自标定对布局的限制[2],即4个基点不能落在同一平面内,这种布局也不行。

式(9)给出的几何图形如图3中(c)所示。图中,矢量 e_1, e_2, e_3 之间的夹角均为 109.47° ,而它们与矢量 e_4 之间的夹角均为 $\theta = 70.53^\circ$ 。矢量端点组成的几何图形为一等腰四面体,其底面为等边三角

形。这种布局既不受猫眼接收角范围的限制,又满足自标定对布局的要求,因此,这就是最佳测量布

局,而最佳测量点就在球心处。

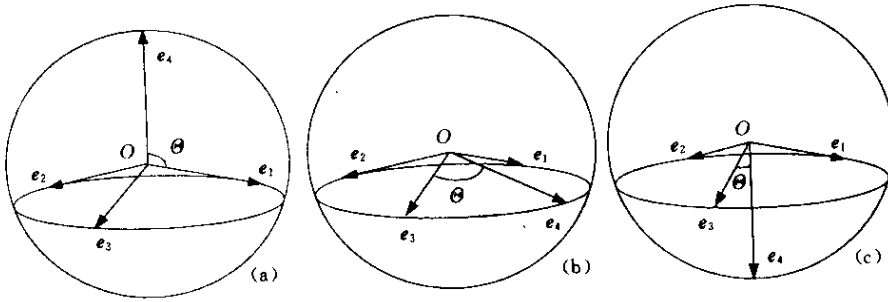


图 3 三种几何图形

Fig.3 Three kinds of geometry

(a) $\theta = 109.47^\circ$; (b) $\theta = 70.53^\circ$; (c) $\theta = 70.53^\circ$

4 结 论

四路激光跟踪三维坐标测量系统的测量精度在很大程度上取决于四路干涉仪的布局,而系统布局优化目前在国际上仍是远未解决的问题。本文提出了具有实用价值的四路激光干涉仪的最佳测量布局。这种布局有着最小的几何精度衰减因子,并且符合目标靶镜接收角范围的限制条件,满足系统自标定对布局的要求。本文得到的系统最佳测量布局对于指导系统实际测量以及提高系统测量精度具有重要意义。在下一篇文章中,我们将继续对系统最佳布局的有关问题进一步进行讨论。

参 考 文 献

- 1 Toshiyuki Takatsuji, Mitsuo Goto, Tomizo Kurosawa *et al.*. The first measurement of a three-dimensional coordinate by use of a laser tracking interferometer system based on trilateration [J]. *Measurement Science & Technology*, 1998, **9**(1) 38 ~ 41
- 2 Toshiyuki Takatsuji, Yoshihiko Koseki, Mitsuo Goto *et*

al.. Restriction on the arrangement of laser trackers in laser trilateration [J]. *Measurement Science and Technology*, 1998, **9**(8):1357 ~ 1359

- 3 Hu Zhaohui, Wang Jia, Liu Yongdong *et al.*. The arrangement and simulation of laser tracking system for measuring coordinate with distance-measured-only [J]. *Optical Technique* (光学技术), 2000, **26**(5):395 ~ 399 (in Chinese)
- 4 Osamu Nakamura, Mitsuo Goto. Four-beam laser interferometry for three-dimensional microscopic coordinate measurement [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(1) 31 ~ 36
- 5 Toshiyuki Takatsuji, Mitsuo Goto, Atsushi Kirita *et al.*. The relationship between the measurement error and the arrangement of laser trackers in laser trilateration [J]. *Measurement Science and Technology*, 2000, **11**(5):477 ~ 483
- 6 Kihara Masahiko, Okada Tsuyoshi. A satellite selection method and accuracy for the global position system [J]. *Navigation*, 1984, **31**(1) 8 ~ 20
- 7 Lin Yongbing. Optimal design of four-beam laser tracking interferometric flexible coordinate measurement system [D]. Doctoral Thesis, Tianjin University, 2002 (in Chinese)