

文章编号: 0258-7025(2002)11-0983-04

# 契伯格-萨克斯顿方法反演相位的二次驱动改进研究

刘兰琴<sup>1,2</sup>, 吴毅<sup>3</sup>

(<sup>1</sup> 中国工程物理研究院激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900; <sup>2</sup> 中国工程物理研究院研究生部, 北京 100088)

<sup>3</sup> 中国科学院安徽光学精密机械研究所, 安徽 合肥 230031

**提要** 契伯格-萨克斯顿(GS)方法在反演相位时,其反演结果并不唯一。通过数值模拟,对GS方法用于反演激光光波相位的唯一性问题进行了研究,提出了一种对GS方法做二次驱动改进的新方法,并对经过改进前后模拟得到的反演结果及其误差特性曲线进行了比较。结果说明,改进的新方法不仅能够克服绝大多数相位的不确定性,反演结果准确性强,而且还加快了收敛速度。

**关键词** GS方法,数值模拟,反演相位,相位唯一性,二次驱动改进

**中图分类号** TN 24 **文献标识码** A

## Research on the Quadratic Driving Mends to the GS Method Retrieving Wavefront

LIU Lan-qin<sup>1</sup>, WU Yi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> The Laser Fusion Research Center, CAEP, Mianyang, Sichuan 621900

<sup>2</sup> The Graduate School, CAEP, Beijing 100088

<sup>3</sup> Anhui Institute of Optics & Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031

**Abstract** When GS method are used for retrieving wavefront, the results are not determinate. This paper reported our work of the uniqueness of phase in which GS method are used for retrieving wavefront of laser beam propagation through the turbulent atmosphere by using Numerical simulation, and put forward some new quadratic driving mends to GS method. Meanwhile, the results getting from GS method are given, and wavefront errors are also compared and analyzed. It is shown that the mends of GS method can not only resolve the uniqueness problems of GS method, but also quicken the speeds of the convergence.

**Key words** GS method, numerical simulation, phase retrieval, the uniqueness of phase, quadratic driving mend

关于光波波前相位恢复的问题长期以来一直受到人们的关注。1971年契伯格-萨克斯顿(Gerchberg-Saxton(GS))提出了一种由成像系统已知瞳面和焦平面的强度分布来反演波前信息的GS算法<sup>[1]</sup>,引起了许多学者的广泛兴趣<sup>[2~6]</sup>,而这一方法是否具有唯一解就显得尤其重要。文献<sup>[3~5]</sup>对相位的唯一性做了许多讨论,所谓唯一性是指某些像差(如Zernike多项式分析的离焦、像散、球差

等)的符号不确定性。西门纪业、Gonsalves等通过一维问题的计算对这一算法的唯一性作了研究<sup>[3,5]</sup>,Foley与Butts等在数学上对唯一性问题作了推导<sup>[6]</sup>,他们在研究中均指出相位收敛只存在两种结果。而我们在对数值模拟激光湍流大气传输相位反演的研究过程中发现存在多种结果的可能性。为此,我们在此方法的基础上,对GS迭代算法进行了二次驱动源的改进。结果表明:改进的方法能有

收稿日期: 2001-09-10; 收到修改稿日期: 2001-11-12

基金项目: 国家 863 激光技术领域资助课题。

作者简介: 刘兰琴(1973.9—),女,博士生,主要从事高功率激光技术方面的研究工作。E-mail: lyrebird\_ly@163.net

效地克服反演结果的不确定性,反演位相准确性强,而且大大提高了迭代收敛速度。唯一的不足就是要进行选择判断,可能造成计算时间的延长,但在现有的计算条件以及所选择的迭代次数不是太大的情况下,这种影响几乎是微不足道的。

### 1 GS 方法原理

GS 方法的原理<sup>[2-5]</sup>可简述为:假设成像系统入瞳平面与焦平面上的场函数分别为

$$U_1(x_1, y_1) = |U_1(x_1, y_1)| \exp[i\varphi_1(x_1, y_1)] \quad (1)$$

$$U_2(x_2, y_2) = |U_2(x_2, y_2)| \exp[i\varphi_2(x_2, y_2)] \quad (2)$$

其中  $|U_1(x_1, y_1)|^2, |U_2(x_2, y_2)|^2$  为光强分布,  $\varphi_1(x_1, y_1), \varphi_2(x_2, y_2)$  为相位分布,根据傅里叶光学原理,它们满足正反傅里叶变换的关系

$$U_2(x_2, y_2) = \mathcal{R}\{U_1(x_1, y_1)\} \quad (3)$$

$$U_1(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{-1}\{U_2(x_2, y_2)\} \quad (4)$$

GS 方法指出,由瞳面光强分布和焦平面光强分布,通过迭代,求解正反傅里叶变换,可以得到光束的相位分布。GS 方法的迭代步骤如下:

1) 先给定一任意相位  $\varphi_1(x, y)$ , 与  $|U_1(x_1, y_1)|$  构成一光场函数  $U_1(x_1, y_1)$ , 进行傅氏变换, 获得焦平面光场  $U_2'$ , 用测量量  $|U_2(x_2, y_2)|$  替换其振幅, 即振幅约束。

2) 将  $U_2'$  进行逆傅氏变换, 获得瞳面光场  $U_1'$ , 用  $|U_1(x_1, y_1)|$  替换其振幅, 即保留  $U_1'$  的相位信息。如此迭代, 以振幅误差量控制所获得的  $\varphi_1'$ , 即为该方法对于待测瞳面相位  $\varphi_1$  的逼近。

可用误差控制量  $\epsilon$  (如瞳面振幅误差)

$$\epsilon = \frac{\sum |U_1(x_i, y_j)| - |U_1'(x_i, y_j)|}{\sum |U_1(x_i, y_j)|^2} \quad (5)$$

来控制迭代过程。

### 2 二次驱动力的改进

由于 GS 算法在反演相位过程中, 存在多种结果的可能性, 因此在迭代算法中, 做了二次驱动源的改进。改进过程如下所述: 经由第  $N$  次迭代后的误差判断, 选择如下变换的任一种对瞳面光场进行一次变换:

$$1) f(x, y) \rightarrow f^*(x, y);$$

$$2) f(x, y) \rightarrow f(-x, -y);$$

$$3) f(x, y) \rightarrow f(y, x);$$

$$4) f(x, y) \rightarrow f(-x, -y) \rightarrow f^*(-x, -y);$$

由傅氏变换性质可以证明上述变换不影响焦平面光强分布, 而它们克服了相位反演符号的不确定性。数值计算表明, 在大多数情况下, 经第  $N$  次迭代误差 ( $\epsilon < e = 10^{-5}$ ) 判断后, 如果迭代误差不满足要求, 再选择上述变换处理中的任一种进行迭代反演, 直到得到满足振幅迅速收敛要求的结果为止。图 1 为其流程图。(注:  $N$  的选择一方面应考虑到误差不能满足要求又要重新选择计算的耗时问题, 所以不能太大; 另一方面又要考虑到大多数相位都能够在此范围内得到比较满意的结果, 所以不能太小, 因此给出  $N = 300 \sim 500$  次作为参考)。

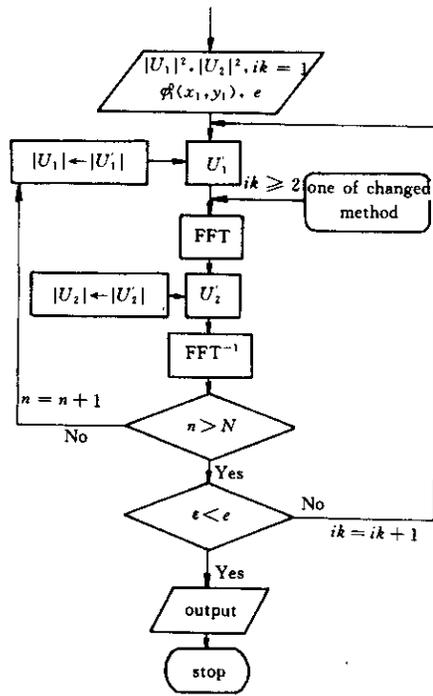


图 1 流程图

Fig.1 Flow chat of simulation

在进行数值模拟中, 由激光大气传输计算程序<sup>[7]</sup>得到激光传输到接收瞳面上的光场分布, 再经成像变换获得焦面光场分布。并将光场中的相位与光强分布分离开来, 光强部分作为模拟测量量, 瞳面相位部分  $\varphi_1(x, y)$  作为误差特性分析的参考量。

### 3 数值模拟计算结果

本文讨论的是二维问题。在计算中, 取  $128 \times 128$  的网格, 瞳面半径为 32, 遮拦比为 0.2, 激光波

长为  $\lambda = 0.6328 \text{ nm}$ 。用  $D/r_0$  描述大气湍流引起的光束波前起伏特征,其中  $D$  为接收瞳面口径,  $r_0$  为大气相干长度(在传输数值模拟计算中设定),它是湍流强度的参数。

图 2 给出了两组  $\epsilon$  随迭代次数  $k$  收敛的曲线,  $D/r_0$  为 1.51。其中曲线 A 为直接用 GS 算法迭代时,

$\epsilon$  随迭代次数的收敛关系,可以看到  $\epsilon$  只能达到  $10^{-2}$  左右; B 分别是经过  $f(x, y) \rightarrow f(-x, -y)$  和  $f(x, y) \rightarrow f(y, x)$  变换后,得到的  $\epsilon$  随迭代次数的收敛曲线,  $\epsilon$  的值达到了  $10^{-12}$ 。可见,这种改进方法虽然存在选择判断的耗时问题,但它在很大程度上能提高迭代结果的精度,优越性也是显而易见的。

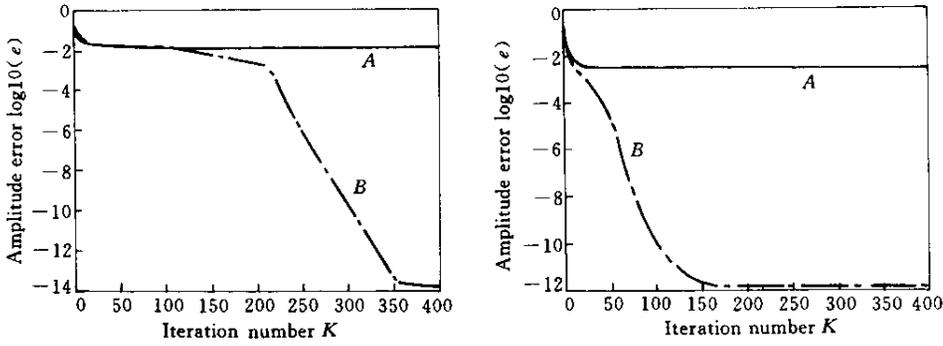


图 2  $\epsilon$  随迭代次数的变化曲线

Fig.2 Relations between  $\epsilon$  and iteration  $k$

A is the iteration result by GS directly ; B is the result by  $f(x, y) \rightarrow f(-x, -y)$  or  $f(x, y) \rightarrow f(y, x)$

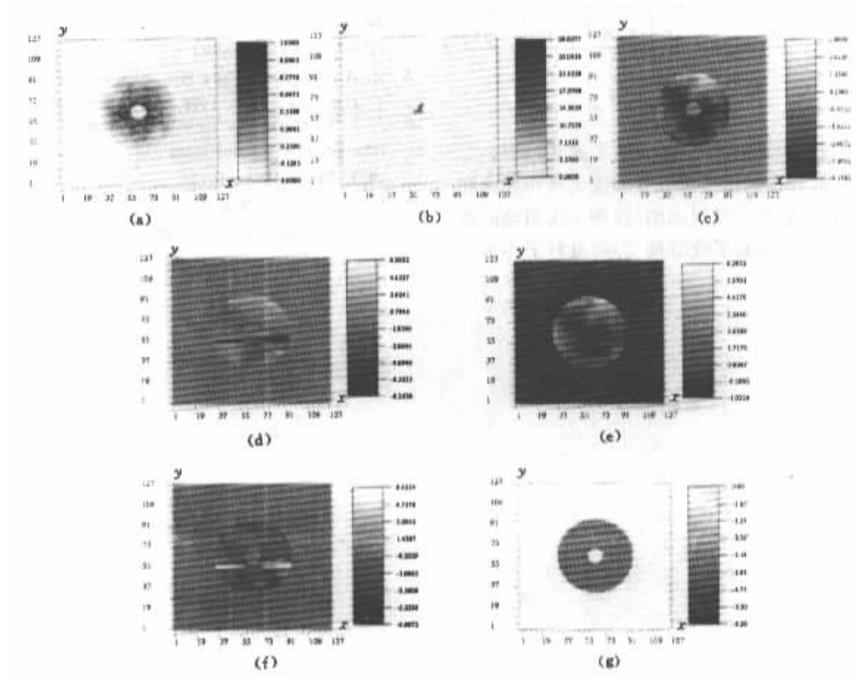


图 3 数值模拟计算的结果

Fig.3 Result of simulation

(a) near field intensity ; (b) focal intensity ; (c) the reference phase ; (d) get from GS directly ; (e) get from one of improved method ; (f) residual error of (c) and (d) ; (g) residual error of (c) and (e)

$\epsilon$  反映的只是瞳面光强的迭代收敛误差,为了进一步评价此方法迭代反演相位  $\varphi_1'$  优越性,用  $\varphi_1'$

$$rr = \frac{\frac{1}{N^2} \sum [\varphi_1(x_i, y_j) - \bar{\varphi}_1(x_i, y_j)] [\varphi_1'(x_i, y_j) - \bar{\varphi}_1'(x_i, y_j)]}{\sqrt{\frac{1}{N^2} \sum [\varphi_1(x_i, y_j) - \bar{\varphi}_1(x_i, y_j)]^2} \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum [\varphi_1'(x_i, y_j) - \bar{\varphi}_1'(x_i, y_j)]^2}} \quad (6)$$

图 3 给出的是  $D/r_0$  为 1.51, 方差为  $2.05\lambda$  的相位的复原情况。图中 (a)(b) 为瞳面光强和焦面光强分布 (c) 为参考相位。(d) 是 GS 算法直接迭代得到的相位 (e) 是由改进的方法得到的相位 (f) 是 (c) 与 (d) 的残余误差 (g) 是 (c) 与 (e) 的残余误差, 各图的方差见表 1。由计算结果可知 (c) 与 (d) 的相关性只有 0.57, 而 (c) 与 (e) 的相关性已经达到了 1.0。这也说明, 这种改进方法能够克服绝大多数相位的不确定性。

表 1 模拟计算结果的方差(单位:  $\lambda$ )

Table 1 The variance of the results from simulation (unit:  $\lambda$ )

Fig. 2	Reference phase	Retrieved phase		Residual phase	
	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Variance	2.05	4.64	2.06	3.17	0.01

## 4 结 论

在原有 GS 算法的基础上, 做了迭代过程的二次驱动改进, 并在数值模拟激光湍流大气传输的相位反演中做了验证。结果表明, 这种二次驱动改进方法不仅大大提高了收敛精度, 而且对于许多二

与参考相位  $\varphi_1$  的归一化相关系数  $rr$  来进行分析反演的结果,  $rr$  的定义为

维问题中存在的相位不确定性基本都能够克服, 反演结果也能够准确地反映原始位相的基本特征。

## 参 考 文 献

- 1 R. W. Gerchberg, W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik.*, 1972, **35**(2): 237 ~ 246
- 2 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: a comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15): 2758 ~ 2769
- 3 J. Y. XiMen, J. W. Yan. Numeration examples of retrieving phase from electron microscope image and diffraction intensity [J]. *Physics Journal*, 1983, **32**(6): 762 ~ 769
- 4 L. Q. Liu, F. Jing, Zh. T. Peng *et al.*. The low-frequency phase retrieval of GS algorithm [J]. *High Power Laser and Particle Beam* (强激光与粒子束), 2000, **12**(sl): 75 ~ 78 (in Chinese)
- 5 R. A. Gonsalves. Phase retrieval from modulus data [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(9): 961 ~ 964
- 6 J. T. Foley, R. R. Butts. Uniqueness of phase retrieval from intensity measurements [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1981, **71**(8): 1008 ~ 1013
- 7 Y. J. Wang, Y. Wu, Z. B. Gong. Simulation of adaptive optics compensation for wavefront degradation induced by turbulence [C]. *SPIE*, 1996, **2828**: 457 ~ 462