第 28 卷 第 8 期
2001 年 8 月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. A28, No. 8
August, 2001

文章编号: 0258-7025(2001)08-0698-03

# 用矩阵元表示的空间自相关函数的传输特性

戴亚平 谢 虎 李银柱 李良钰 刘 诚 朱健强
(高功率激光物理国家实验室,中国科学院上海光机所 上海 201800)

**提要** 根据自相关函数的定义,从 Fresnel 衍射理论入手,运用 Collins 公式,推导得到了任意波面的空间自相关函数的传输公式,并针对几种特殊的光学系统进行了分析。

**关键词** 空间自相关函数, Fresnel 衍射, Collins 公式
**中图分类号** O 436.1; O 174 **文献标识码** A

# Transfer Formula of Spatial Auto-correlation Function in terms of Ray Matrix Elements

DAI Ya-ping XIE Hu LI Yin-zhu LI Liang-yu LIU Cheng ZHU Jian-qiang
(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

**Abstract** On the basis of the Fresnel diffraction theory and Collins formula, the transfer of Auto-Correlation Function (ACF) of an arbitrary spatial wave-front is studied. The transfer formula of ACF is given. And the analysis for some special optical systems is also concerned.

**Key words** auto-correlation function, Fresnel diffraction, Collins formula

## 1 引 言

功率谱密度(PSD)由于其特有的统计性质,常常被用来评价具有任意位相或振幅扰动波面的空间特性[1~4],关于 PSD 的传输性质在文献[5]中也已有具体论述。但是在许多光学现象中,仅仅讨论 PSD 的传输是不够的,也不是最直观的。例如在光学干涉现象中,干涉图的强度分布体现的是波面互相关函数(Cross-Correlation Function, CCF)或自相关函数(Auto-Correlation Function, ACF)的分布;而且由于 ACF 与 PSD 共为傅里叶变换对,以及 ACF 和 CCF 之间特定的关系[6],所以研究 ACF 的传输特性是很有必要的。

本文基于 Fresnel 衍射理论,运用 Collins 公式,对 ACF 的传输特性进行了初步探讨。

## 2 理论推导

对于具有任意位相或振幅扰动的波面 $E(x)$(为方便起见,本文仅仅讨论一维的情况),其空间 ACF 可以表示为[6]

$$\Gamma(x+\Delta x, x) = \langle E(x+\Delta x)\cdot E^*(x)\rangle = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} E(x+\Delta x)\cdot E^*(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中,$\langle\ldots\rangle$ 表示取系综平均,$L$ 为取样长度,$\Delta x$ 是取相关的长度,$E^*(x)$ 表示取 $E(x)$ 的共轭。当 $E(x)$ 是一个具有一阶平稳增量的随机过程时[6],ACF 只与 $\Delta x$ 有关,而与空间坐标 $x$ 无关。此时,ACF 可以写成 $\Gamma(\Delta x)$,其与功率谱密度之间的关系为

$$\mathrm{PSD} = \int_{+\infty}^{-\infty}\Gamma(\Delta x)\exp(j2\pi f_x\cdot\Delta x)\,\mathrm{d}(\Delta x) \tag{2}$$

式中 $f_x$ 为空间频率。

### 2.1 无限孔径

对于如图 1 所示的任意波面 $E_1(x)$,其空间 ACF 为 $\Gamma(x_1, x_2)$;当其通过用光学矩阵 $A, B, C, D$ 表示的任意光学系统后,出射波面变为 $E'_1(x)$,ACF 变成了 $\Gamma'(x'_1, x'_2)$。本文的目的就是要找出 $\Gamma(x_1, x_2)$ 与 $\Gamma'(x'_1, x'_2)$ 之间的关系。

收稿日期: 2000-04-24; 收到修改稿日期: 2000-07-11

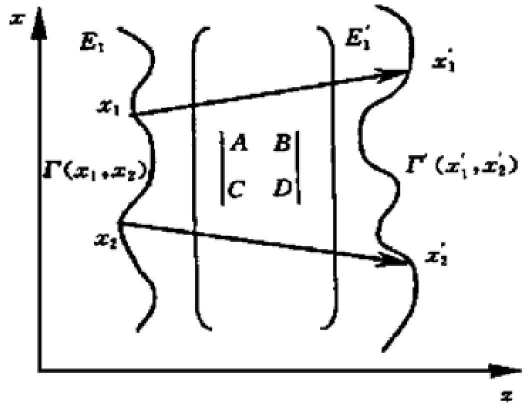


图 1　空间自相关函数传输示意图

Fig. 1　Scheme of the ACF′s transfer

运用 Collins 公式, 可以将 $E'_1(x)$ 用 $E_1(x)$ 表示为[7]

$$E'_1(x') = \sqrt{\frac{1}{j\lambda B}}e^{jkB}\int E_1(x)\cdot e^{\frac{jk}{2B}(Ax^2-2xx'+Dx'^2)}\mathrm{d}x \tag{3}$$

那么可以得到

$$\begin{aligned}E'_1(x'_1) &= \sqrt{\frac{1}{j\lambda B}}e^{jkB}\int E_1(x_1)\cdot e^{\frac{jk}{2B}(Ax_1^2-2x_1x'_1+Dx'^2_1)}\mathrm{d}x_1\\ E'^*_1(x'_2) &= \sqrt{\frac{1}{-j\lambda B}}e^{-jkB}\int E^*_1(x_2)\cdot e^{\frac{-jk}{2B}(Ax_2^2-2x_2x'_2+Dx'^2_2)}\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{4}$$

将上式代入式(1)可得

$$\begin{aligned}\Gamma'(x'_1,x'_2) &= \langle E'_1(x'_1)\cdot E'^*_1(x'_2)\rangle = \\ &\left\langle\frac{1}{\lambda B}\iint E_1(x_1)\cdot E^*_1(x_2)\,e^{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2-x_2^2)-2(x_1x'_1-x_2x'_2)+D(x'^2_1-x'^2_2)]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right\rangle = \\ &\frac{1}{\lambda B}\iint\langle E_1(x_1)\cdot E^*_1(x_2)\rangle e^{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2-x_2^2)-2(x_1x'_1-x_2x'_2)+D(x'^2_1-x'^2_2)]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{5}$$

注意到

$$\Gamma(x_1,x_2) = \langle E_1(x_1)\cdot E^*_1(x_2)\rangle$$

式(5) 可以写成

$$\Gamma'(x'_1,x'_2) = \frac{1}{\lambda B}\iint\Gamma(x_1,x_2)\,e^{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2-x_2^2)-2(x_1x'_1-x_2x'_2)+D(x'^2_1-x'^2_2)]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{6}$$

(6)式就是用光学矩阵元表示的 ACF 传输公式。显然, 这一公式很复杂, 也很难看出 ACF 的传输特性。为了简化(6)式, 我们认为 $E_1(x)$ 具有一阶平稳增量(对于大多数的具有随机扰动的波面来说, 这个限制并不严格)。此时 ACF 只与 $\Delta x$ 有关, 那么 $\Gamma(x_1, x_2)$ 可以写为 $\Gamma(\Delta x)$, $\Gamma'(x'_1,x'_2)$ 可以写为 $\Gamma'(\Delta x')$。

同时, 在上式中, 如果做变量代换

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2},\quad \Delta x = x_2-x_1\\ \bar{x}' &= \frac{x'_1+x'_2}{2},\quad \Delta x' = x'_2-x'_1\end{aligned} \tag{7}$$

那么, 由式(6)可以得到

$$\begin{aligned}\Gamma'(\Delta x') &= \frac{1}{\lambda B}\iint\Gamma(\Delta x)\cdot e^{\frac{jk}{B}(-A\Delta x\cdot\bar{x}+\bar{x}'\cdot\Delta x+\bar{x}\cdot\Delta x'-D\Delta x'\cdot\bar{x}')}\mathrm{d}(\Delta x)\,\mathrm{d}\bar{x} = \\ &\frac{1}{\lambda B}e^{-\frac{jk}{B}D\Delta x'\cdot\bar{x}'}\iint\Gamma(\Delta x)\cdot e^{\frac{jk}{B}(-A\Delta x\cdot\bar{x}+\bar{x}'\cdot\Delta x+\bar{x}\cdot\Delta x')}\mathrm{d}(\Delta x)\,\mathrm{d}\bar{x} = \\ &\frac{1}{\lambda B}e^{-\frac{jk}{B}D\Delta x'\cdot\bar{x}'}\int e^{\frac{jk}{B}(\bar{x}\cdot\Delta x')}\mathrm{d}(\Delta x)\cdot\int\Gamma(\Delta x)\cdot e^{\frac{jk}{B}(-A\Delta x\cdot\bar{x}+\bar{x}'\cdot\Delta x)}\mathrm{d}(\Delta x)\end{aligned} \tag{8}$$

再令

$$f_x = \frac{\bar{x}'-A\bar{x}}{B\lambda} \tag{9}$$

则

$$\bar{x} = (\bar{x}'-f_xB\lambda)/A,\qquad \mathrm{d}\bar{x} = -(B\lambda/A)/\mathrm{d}f_x$$

代入式(8) 可得

$$\begin{aligned}\Gamma'(\Delta x') &= -\frac{1}{A}e^{-\frac{jk}{B}D\Delta x'\cdot\bar{x}'}\int e^{\frac{j2\pi}{B\lambda}\left(\frac{\bar{x}'-f_xB\lambda}{A}\right)\Delta x'}\mathrm{d}f_x\cdot\int\Gamma(\Delta x)\cdot e^{j2\pi f_x\Delta x}\mathrm{d}(\Delta x) = \\ &-\frac{1}{A}e^{\frac{jk}{B}\left(\frac{1}{A}-D\right)\Delta x'\cdot\bar{x}'}\int e^{-\frac{j2\pi}{A}f_x\Delta x'}\mathrm{d}f_x\cdot\int\Gamma(\Delta x)\cdot e^{j2\pi f_x\Delta x}\mathrm{d}(\Delta x)\end{aligned} \tag{10}$$

可见, 式中的第二个积分就是对 $\Gamma(\Delta x)$ 的傅里叶变换。而如果令

$$f'_x = f_x/A \tag{11}$$

则上式中第一个积分也是一个傅里叶变换式, 此时有

$$\begin{aligned}\Gamma'(\Delta x') &= -1\cdot e^{-\frac{jkC}{A}\Delta x'\cdot\bar{x}'}\int e^{-j2\pi f'_x\Delta x'}\mathrm{d}f'_x\cdot\\ &\int\Gamma(\Delta x)\cdot e^{j2\pi f_x\Delta x}\mathrm{d}(\Delta x) = \\ &e^{-\frac{jkC}{A}\Delta x'\cdot\bar{x}'}\Gamma(A\cdot\Delta x')\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式就是简化后的具有任意随机扰动波面的 ACF

传输公式。需要注意的是(12)式的成立是建立在波面的随机扰动具有一阶平稳增量的基础上的。从(12)式可以发现, ACF 的传输过程是对输入波面的 ACF 进行两次傅里叶变换, 然后再乘上一个位相因子。两次傅里叶变换的空间频率由式(9)和式(11)确定, 两者不一定相同。而两个空间频率的差别就是对输入波面的 ACF 均匀地展宽或压缩。

### 2.2 有限孔径

当在入射面上存在有限孔径时, 有限孔径的复振幅透过率可以用复瞳函数 $P(x)$ 表示

$$P(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant l/2\\ 0 & |x|> l/2\end{cases} \tag{13}$$

式中 $l$ 为有限孔径的线宽。那么由式(4)和式(1)可得

$$\Gamma'(x'_1,x'_2)=\langle E'_1(x'_1)\cdot E'^*_1(x'_2)\rangle=$$
$$\frac{1}{\lambda B}\iint\langle P(x_1)\cdot P^*(x_2)\rangle\langle E_1(x_1)\cdot E_1^*(x_2)\rangle e^{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2-x_2^2)-2(x_1x'_1-x_2x'_2)+D(x'^2_1-x'^2_2)]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$
$$\frac{1}{\lambda B}\iint P(x_1,x_2)\,\Gamma(x_1,x_2)\,e^{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2-x_2^2)-2(x_1x'_1-x_2x'_2)+D(x'^2_1-x'^2_2)]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{14}$$

式中 $P(x_1,x_2)$ 为复瞳函数 $P(x)$ 的自相关函数, 由式(13)和式(1)可以证明[8]

$$P(x_1,x_2)=P(\Delta x)=\Lambda\left(\frac{\Delta x}{l}\right)=$$
$$\begin{cases}1-|\Delta x/l| & |\Delta x/l|\leqslant 1\\ 0 & |\Delta x/l|>1\end{cases} \tag{15}$$

式中 $\Lambda$ 为三角状函数。那么, 代入上式, 再假设 $E_1(x)$ 具有一阶平稳增量, 并做如式(7)的变量代换, 可得

$$\Gamma'(\Delta x')=e^{-\frac{jkC}{A}\Delta x'\cdot x'}\Lambda\left(A\cdot\frac{\Delta x'}{l}\right)\cdot\Gamma(A\cdot\Delta x') \tag{16}$$

比较上式与式(12)可见, 在入射面上存在有限孔径时, 出射波面的 ACF 等于没有有限孔径限制时的 ACF 乘以一个三角状函数。对应于功率谱密度分布, 就是没有孔径限制时的 PSD 卷积一个 sinc 函数的平方。

## 3 具体分析

### 3.1 $A=0$

$A=0$ 对应着输出面是透镜的焦平面的情况。此时, 式(12)中的位相因子可以写成 δ 函数的形式, 那么有

$$\Gamma'(\Delta x')=\Gamma(0)=\langle E_1(x)\cdot E_1^*(x)\rangle=I_1(x) \tag{17}$$

可见, 输出波面的空间 ACF 就等于输入波面的强度分布。

### 3.2 $C=0$

$C=0$ 时, 式(12)可以写为

$$\Gamma'(\Delta x')=\Gamma(A\cdot\Delta x') \tag{18}$$

可见, 输出波面的空间 ACF 与输入波面的空间 ACF 在分布上是一致的, 两者的差别仅仅是分布上的展宽或压缩。$C=0$ 对应的光学系统包括自由空间、望远系统和 $4f$ 系统等。

### 3.3 $B=0$

$B=0$ 对应着成像系统。此时, 式(3)可以写为

$$E'_1(x')=\sqrt{1/A}\cdot e^{\frac{jkC}{2A}x'^2}\cdot E_1(x'/A) \tag{19}$$

那么, 对于 $E'_1(x'_1)$ 和 $E'_1(x'_2)$ 有

$$E'_1(x'_1)=\sqrt{1/A}\cdot e^{\frac{jkC}{2A}x'^2_1}\cdot E_1(x'_1/A)$$
$$E'^*_1(x'_2)=\sqrt{1/A}\cdot e^{\frac{-jkC}{2A}x'^2_2}\cdot E^*_1(x'_2/A)$$

代入式(1)可得

$$\Gamma'(x'_1,x'_2)=\langle E'_1(x_1)\cdot E'^*_1(x_2)\rangle=$$
$$\frac{1}{A}\cdot e^{\frac{jkC}{2A}(x'^2_1-x'^2_2)}\cdot\Gamma\left(\frac{x'_1}{A},\frac{x'_2}{A}\right) \tag{20}$$

上式就是当 $B=0$ 时 ACF 的传输公式。可见, 任意波面在通过成像系统后, 其空间 ACF 并不能再现。

## 参 考 文 献


1 E. L. Church. Fractal surface finish. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(8): 1518~1526

2 J. M. Bennett, L. Mattsson. Introduction to Surface Roughness and Scattering. Washington, D. C.: Optical Society of America, 1989. 28~29, 44~50

3 J. C. Stover. Optical scattering: Measurement and analysis. Bellingham, Washington: SPIE, 1995, Chapter 1, 1~23

4 J. M. Elson, J. M. Bennett. Calculation of the power spectral density from surface profile data. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(1): 201~208

5 Dai Yaping, Xie Hu, Li Yinzhu *et al.*. The transmission of power spectral density: theoretical and numerical analysis. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 2001, **A28**(4): 337~342

6 J. W. Goodman. Statistic Optics. Beijing: Science Publishing Company, 1992, Chapter 3 (in Chinese)

7 Stuart A. Collins, Jr.. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9): 1168~1177

8 J. W. Goodman. Statistic Optics. Beijing: Science Publishing Company, 1992, Chapter 8 (in Chinese)