

文章编号: 0258-7025(2001)04-0337-06

# 功率谱密度传输性质的理论分析和数值模拟

戴亚平 谢 虎 李银柱 李良钰 张全慧 朱健强

(中国科学院上海光机所国家高功率激光物理联合实验室 上海 201800)

**提要** 基于 Fresnel 衍射理论,运用 Collins 公式,对具有随机位相扰动的波面的功率谱密度(PSD)的传输进行了理论分析,并针对几种典型的光学系统,具体分析了 PSD 在其中的传输,给出了详细的数值模拟解。

**关键词** 功率谱密度,衍射积分,傅里叶变换,光学传输矩阵,相干传递函数

中图分类号 O 242.1 文献标识码 A

## Propagation of Power Spectral Density : Theoretical and Numerical Analysis

DAI Ya-ping XIE Hu LI Yin-zhu LI Liang-yu ZHANG Quan-hui ZHU Jian-qiang

(National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

**Abstract** With the Fresnel diffraction theory and Collins equation, the propagation of power spectral density (PSD) of wave-front with random phase is studied. The theoretical analysis for the propagation of PSD in some typical optical system is concerned, and the digital simulation results are also given.

**Key words** power spectral density, diffraction integration, Fourier transform, optical transmission matrix, modulate transmission function

### 1 引 言

目前,功率谱密度(PSD)作为衡量波面时间和空间特性的一个重要参数,已经得到了越来越广泛的重视和运用。特别是在波面的空间特性评价中,以往的评价参数主要包括平均值( $R_a$ ),均方根值(RMS),波峰-波谷值( $P-V$ ),相关长度( $l_a$ )以及一维或二维空间分布等,这些参数都无法直观地体现波面起伏的强度(垂直量)与空间频率(Spatial Frequency,水平量)之间的关系。而 PSD 将两者联系起来,并且由 PSD 可以很方便地得到其他一些统计参数(如 RMS 和自相关函数等)。所以从八十年代末开始,PSD 在空间特性的评价中引起了广泛兴趣,并得到了迅速发展<sup>[1~4]</sup>。目前基于 PSD 的评价手段已得到广泛的应用<sup>[5~9]</sup>,而且国外已有相关的标准制订出来<sup>[10,11]</sup>。

由 Fresnel 衍射理论可知,波面在光学系统中的传输过程中,其空间特性是在不断变化的。那么,波面空间分布的 PSD(本文以下均只对空间分布的 PSD 进行讨论)也必然是变化的。所以研究波面的 PSD 的传输是很有必要的。特别是对于运用光学干涉的检测系统,由干涉面上测得的波面分布计算出的 PSD 与实际被检波面的 PSD 之间是存在差别的。

本文从 Fresnel 衍射理论出发,讨论波面的 PSD 的传输,并用数值模拟法,随机生成一组具有位相扰动的波面,并对其 PSD 的传输进行了数值分析。

### 2 理论分析

对于一个具有任意空间分布的波面  $E(x, y)$ , 其 PSD 可以表示为<sup>[4]</sup>

$$\text{PSD} = \frac{|F\{E(x, y)\}|^2}{L} \quad (1)$$

式中  $F$  表示进行傅里叶变换,  $L$  为取样长度, ... 表

示取系综平均。由上式可以看出,PSD 表征的是谱强度在空间频率上的分布,是一个统计量。

假设输入波面为  $E_1(x_1, y_1)$ , 它的 PSD 为  $\mathcal{F}(E_1)$ 。该波面继续传输,通过任意一个光学系统后的波面为  $E_2(x_2, y_2)$ , 其 PSD 为  $\mathcal{F}(E_2)$ 。对于  $E_2(x_2, y_2)$  和  $E_1(x_1, y_1)$  之间的关系,在傍轴近似的情况下,通过 Collins 衍射积分公式可以得到<sup>[13]</sup>

$$E_2(x_2, y_2) = -\frac{jk}{2\pi B} \exp(jkL_0) \iint E_1(x_1, y_1) \cdot \exp\left\{\frac{jk}{2B}[A(x_1^2 + y_1^2) - \mathcal{X}x_1x_2 + y_1y_2] + D(x_2^2 + y_2^2)\right\} dx_1 dy_1 \quad (2)$$

式中  $k$  为波数,  $L_0$  为传输距离,而  $A, B, C, D$  是光学传输矩阵的矩阵元。(2) 式又可以简单地写成

$$E_2(x_2, y_2) = \iint K(x_2, y_2; x_1, y_1) E_1(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (3)$$

其中  $K(x_2, y_2; x_1, y_1)$  就是光学系统的点扩展函数,它可以写成空间不变量。那么,在频域中,  $E_2(x, y)$  和  $E_1(x, y)$  的频谱之间存在简单关系<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned} F\{E_2(x_2, y_2)\} &= F\{K(x_2, y_2; \tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\} \cdot F\{E_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\} = \\ &= AF\{K(x_2, y_2; \tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\} \cdot F\{E_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)\} = \\ &= AH(\nu_x, \nu_y) \cdot E(A\nu_x, A\nu_y) \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(x_2, y_2) &= E_2(x_2, y_2) \exp\left[-ik\frac{C}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right] \\ \tilde{K}(x_2, y_2; \tilde{x}_1, \tilde{y}_1) &= \frac{1}{i\lambda AB} \cdot \end{aligned}$$

$$\exp\left\{\frac{ik}{2AB}[(x_2 - \tilde{x}_1)^2 + (y_2 - \tilde{y}_1)^2]\right\}$$

$$\tilde{E}_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \frac{1}{A} E_1(\tilde{x}_1/A, \tilde{y}_1/A)$$

$$H(\nu_x, \nu_y) = \exp[-i\pi\lambda AB(\nu_x^2 + \nu_y^2)]$$

$$\tilde{x}_1 = Ax_1, \tilde{y}_1 = Ay_1$$

式中省略了常数位相因子。  $H(\nu_x, \nu_y)$  就是光学系统的等效相干传递函数。由上式可见,  $\tilde{E}_2(x_2, y_2)$  与  $E_2(x_2, y_2)$  只相差一个二次位相因子,等效于在输出面  $(x_2, y_2)$  上放置了一个焦距  $f = A/C$  的位相透镜,那么这个位相因子在频域的作用就是对  $E_2(x_2, y_2)$  的频谱进行压缩或展宽。此外,  $E_2(x_1, y_1)$  与  $E_1(x_1, y_1)$  的关系表示将输入波面横向放大了  $A$  倍。这时有

$$E_2(\nu_x, \nu_y) = \tilde{E}_2(\nu_x, \nu_y) * F\left\{\exp\left[ik\frac{C}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right]\right\} \quad (5)$$

式中  $*$  表示卷积。对于  $E_2(x_2, y_2)$  的 PSD  $\mathcal{F}(E_2)$ , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E_2) &= \frac{|F\{E_2(x_2, y_2)\}|^2}{L} = \\ &= \frac{|E_2(\nu_x, \nu_y)|^2}{L} = \\ &= \frac{\left|\tilde{E}_2(\nu_x, \nu_y) * F\left\{\exp\left[ik\frac{C}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right]\right\}\right|^2}{L} = \\ &= \frac{\left|A \cdot H(\nu_x, \nu_y) \cdot E_1(A\nu_x, A\nu_y) * F\left\{\exp\left[ik\frac{C}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right]\right\}\right|^2}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

上式中等效传递函数  $H(\nu_x, \nu_y)$  的模量等于 1。那么,上式可以写成

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E_2) &= \frac{\left|A \cdot E_1(A\nu_x, A\nu_y) * F\left\{\exp\left[ik\frac{C}{2A}(x_2^2 + y_2^2)\right]\right\}\right|^2}{L} = \\ &= A^2 \cdot \frac{|E_1(\nu'_x, \nu'_y)|^2}{L} = A^2 \mathcal{F}(E_1) \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $\mathcal{F}(E_1)$  是修正后的  $E_1(x_1, y_1)$  的 PSD,  $(\nu'_x, \nu'_y)$  表示经过卷积后,  $E_1(x_1, y_1)$  的频谱在分布上的改变。可见, PSD 在传输后,其强度变为初始 PSD 的  $A^2$ , 并且产生频移。这个频移由两方面引起:一是对输出波面进行修正而引入的二次位相因子;二是对输入波面修正而引入的横向放大率  $A$ 。

式(7)就是 PSD 的传输公式。下面将针对不同的光学系统,对 PSD 的传输进行具体分析并给出数值模拟解。

### 3 数值模拟

#### 3.1 具有随机位相扰动波面的生成

在计算 PSD 的传输前,首先需要构造一个具有随机位相扰动波面的分布。为了使构造的波面具有针对性,该波面应该具有特定的空间频率范围(即带宽)。为此,可以根据对光学表面的微观起伏的划分来生成随机波面。事实上,光学表面的微观起伏可以分离出来,看作是一个随机位相板,因此一个理想单色平面波通过该随机位相板后的波面就是具有随机位相扰动的波面。

通常情况下,光学表面的微观起伏可以划分为三类<sup>[6]</sup>: 1) 表面粗糙度(roughness),其空间波长小于  $120 \mu\text{m}$ ; 2) 表面纹波(ripple),其空间波长为  $0.12 \sim 33 \text{ mm}$ ; 3) 表面轮廓(figure),其空间波长大于  $33 \text{ mm}$ 。对于表面轮廓,通常不使用 PSD 进行评价,所以我们主要针对“表面粗糙度”和“表面纹波”随机产

生了两个分布函数  $z(x), z(x)$  为简单起见, 仅仅考虑一维的情况。如图 1(a)(b) 所示。在理想单色平面波入射情况下, 由这两个分布函数产生的波面分布为

$$E(x) = \exp[jkz(x)] \quad (8)$$

式中  $z(x)$  就是随机产生的分布函数。那么  $E(x)$  的 PSD 可以用下式进行计算

$$\mathcal{R}\{E(x)\} = \frac{\Delta x}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} E(x_n) \exp\left(-\frac{2\pi i m n \Delta x}{N}\right) \right|^2 \quad (9)$$

式中,  $E(x_n)$  是  $E(x)$  离散取样的结果,  $N$  为取样总数  $\Delta x$  为取样间隔。由此计算出的 PSD 见图 1(c),

(d)。这样就可以通过数值模拟得到具有随机位相扰动的波面分布及其 PSD 分布了。需要注意的是, 上式并没有如式(1)一样对波面分段计算后取系综平均, 即计算的并不是平均 PSD, 但这并不影响观察 PSD 的传输性质<sup>[4]</sup>。

在下面的计算中, 都使用了如下假设: 1. 随机位相板放置于光学系统的入瞳位置, 对于随机位相板的取样长度就是入瞳的大小; 2. 入射波均为理想单色平面波, 波长为  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。

下面分别对自由空间、单透镜、望远系统和成像系统分析 PSD 的传输, 并给出数值模拟解<sup>[13-16]</sup>。

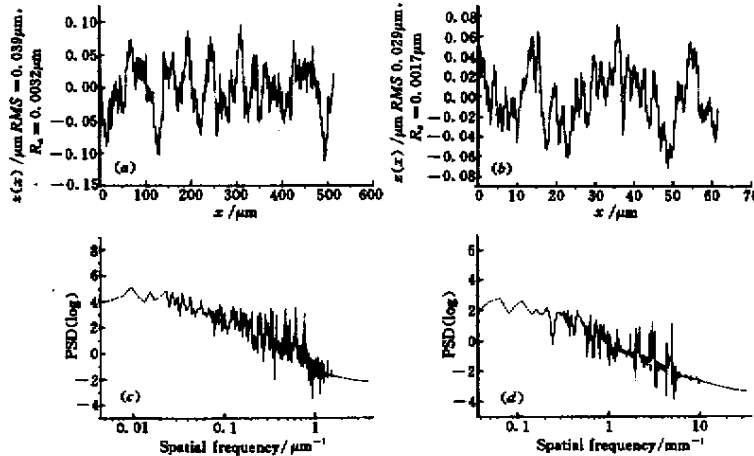


图 1 生成的表面粗糙度分布函数 (a) 及其后波面的 PSD (c), 以及纹波分布函数 (b) 及其后波面的 PSD (d)

Fig. 1 Distribution of roughness (a) and the PSD of transmission wave-front (c), and the distribution of ripple (b) and the PSD of transmission wave-front (d)

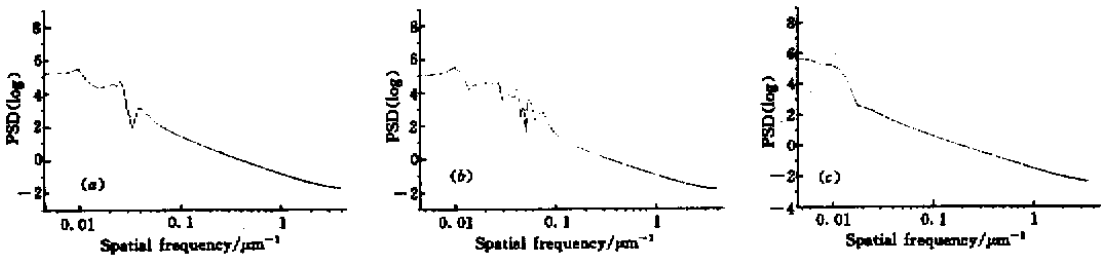


图 2 粗糙度产生的波面 PSD 在有限口径截取下的自由空间中的传输

Fig. 2 Propagation in free space with finite aperture of the PSD caused by roughness

(a)  $l = 10 \text{ mm}$ ; (b)  $l = 20 \text{ mm}$ ; (c)  $l = 30 \text{ mm}$

### 3.2 自由空间

对于自由空间传输, 光学传输矩阵可以写成

$$M = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中  $l$  为传输距离。由式(6)和(7)可以看出, 在自由空间中, 随着波面的传输, PSD 没有变化。但是, 在大多数光学系统中(特别是检测系统), 观测面(即

输出面)的口径是有限的, 所以研究 PSD 在有限口径截取下的传输是有实际意义的。此时, 有限口径截取改变了等效相干传递函数, 即

$$H(\nu_x, \nu_y) = \exp[-i\pi\lambda l(\nu_x^2 + \nu_y^2)] * F\{t(x_2, y_2)\} \quad (11)$$

式中  $t(x_2, y_2)$  表示有限口径的光瞳函数。显然有限口径的存在将使输出波面的 PSD 展宽, 即出现频

移。  
数值计算出的两个波面的 PSD 在有限口径截

取下的自由空间的传输如图 2 和图 3。其中有限口径的大小等于输入波面的空间尺度。

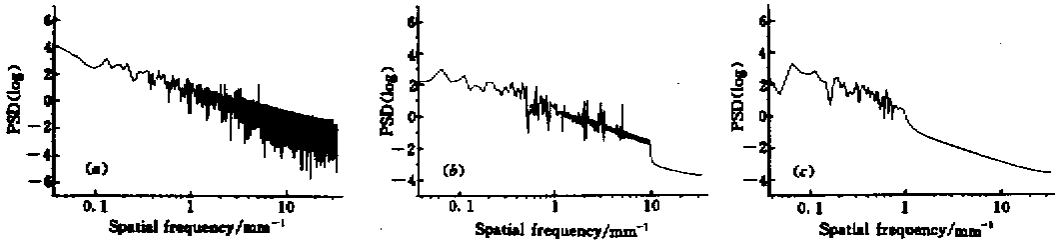


图 3 纹波产生的波面 PSD 在有限口径截取下的自由空间中的传输

Fig.3 Propagation in free space with finite aperture of the PSD caused by ripple

(a)  $l = 1000 \text{ mm}$  ; (b)  $l = 10000 \text{ mm}$  ; (c)  $l = 100000 \text{ mm}$

由两图的对比可以看出,由粗糙度引起的波面扰动的高频分量迅速发散,所以通常情况下,表面粗糙度对波面在自由空间传输的影响并不大。事实上,除极少数情况(例如对于 X 光以及信息光学领域)粗糙度对于波面传输的影响都可以忽略,所以在下面的数值模拟中,对粗糙度的影响均不再考虑。但是对于纹波就不同了,从图中可以看到,由纹波引起的 PSD 的高频分量一直传输到 10 m 以后才渐渐抹平,而在短距离传输中,这个影响尤为严重。可见,纹波对波面传输的影响是很大的。

此外,从图中也可以看出,由于波面衍射和干涉的作用,PSD 的分布中会出现许多高频谱分量,这些谱分量随着波面的传输逐渐发散,而且原有的谱分量也会受到一个随着波面传输从强到弱的调制过程的作用。那么对于检测系统来说,特别是光学检测,在光路的不同位置截取波面进行测量,所得到的 PSD 都是不一样的。这就要求根据被检 PSD,合理地选择检测装置的带宽,以减小有限口径对检测结果的影响。

### 3.3 单透镜

对于单透镜系统,光学传输矩阵可以写成

$$M = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - l/f & l \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中  $f$  为透镜的焦距。单透镜焦点位置场的 PSD 分布实际上就是输入波面的强度分布。而我们感兴趣的是焦点两侧波面在有限口径截取下的 PSD 分布,这对于许多使用会聚光干涉的检测系统以及空间滤波器是有实际意义的。如果上式中  $l = f + \Delta l$  ( $\Delta l \leq f$ ),那么有

$$\mathcal{E}(E_2) = \left| \left( \frac{\Delta l}{f} \right) \cdot E_1 \left( \frac{\Delta l \cdot \nu_x}{f}, \frac{\Delta l \cdot \nu_y}{f} \right) \right|^2$$

$$F \left\{ \exp \left[ ik \frac{1}{2\Delta l} (x_2^2 + y_2^2) \right] \cdot t(x_2, y_2) \right\}^2 / L \quad (13)$$

由上式可见,随着  $\Delta l$  的增大,PSD 的强度不断增大;而且 PSD 分布被逐渐展宽。这一点从图 4 中也可以得到体现。从图中可以清晰地看到 PSD 的展宽过程,随着  $\Delta l$  的增大,低频分量不断减少,而高频谱分量不断“冒”出来。所以,在这种情况下,可以说单透镜对于 PSD 的作用是一个“压缩”的过程。

### 3.4 成像系统

对于理想成像系统(无限孔径),光学传输矩阵的矩阵元  $B = 0$ ,此时式(2)不再成立,这时有

$$E_{\mathcal{X}}(x_2, y_2) = \exp \left[ \frac{ikC}{2A} (x_2^2 + y_2^2) \right] \frac{1}{A} E_1 \left( \frac{x_2}{A}, \frac{y_2}{A} \right) \quad (14)$$

式中省略了常数位相因子。 $A$  为放大倍率。那么,  $E_{\mathcal{X}}(x_2, y_2)$  的 PSD 为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(E_2) &= \frac{|F\{E_{\mathcal{X}}(x_2, y_2)\}|^2}{L} = \frac{|E_{\mathcal{X}}(\nu_x, \nu_y)|^2}{L} = \\ &= \frac{\left| A \cdot E(\nu_x, \nu_y) * F \left\{ \exp \left[ ik \frac{C}{2A} (x_2^2 + y_2^2) \right] \right\} \right|^2}{L} \end{aligned} \quad (15)$$

可见上式与式(7)完全一致。此外也可以看出,空域成像并不对应谱域成像。

在实际成像系统中,有限口径的引入会使 PSD 的传输更为复杂。虽然可以由光瞳函数得到相干传递函数<sup>[14, 15]</sup>,但必须对输入和输出波场进行较复杂的修正。图 5 给出的是利用传输矩阵分段计算得到的结果。计算中,成像透镜的焦距为  $f = 50 \text{ mm}$ ,  $f/D$  ( $D$  为透镜的通光口径)分别取 2.8[(a)(b)],

5.  $\Delta(c)(d)$ 和 11.  $\Delta(e)(f)$  物距  $d_0$  则分别取 100 mm  $[(a)(c)(e)]$ 和 150 mm  $[(b)(d)(f)]$

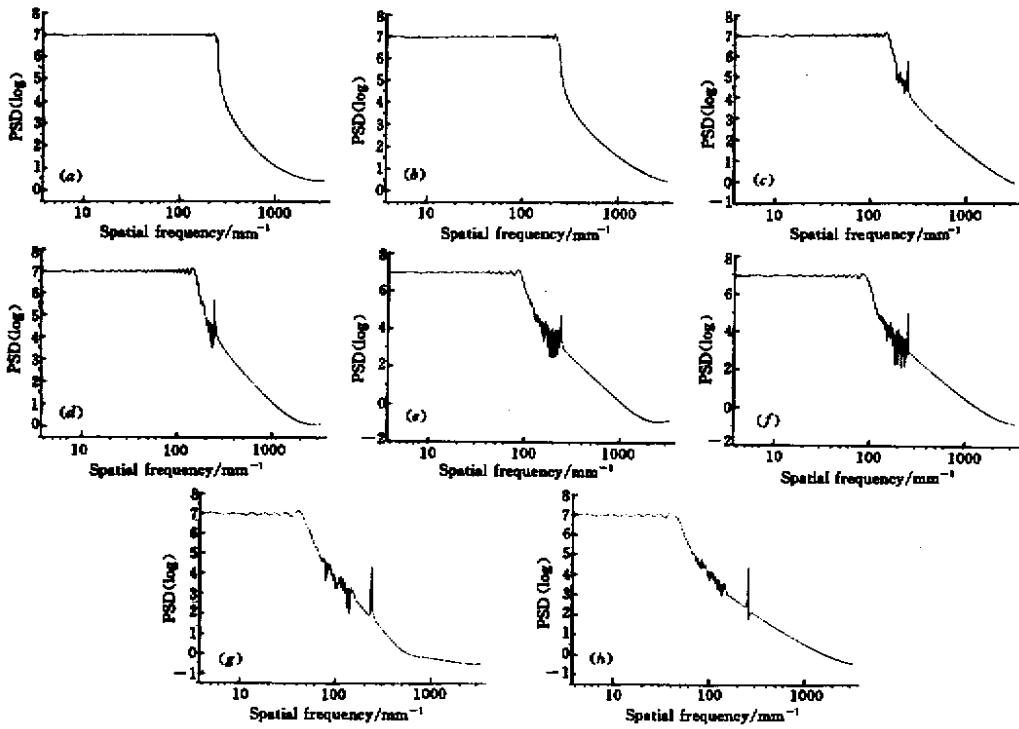


图 4 波纹产生的波面 PSD 在焦点附近的分布 ( $f = 200$  mm)

Fig.4 Distribution of PSD caused by ripple around the focal point ( $f = 200$  mm)

(a) ripple ( $l = f + 2$  mm); (b) ripple ( $l = f - 2$  mm); (c) ripple ( $l = f + 3$  mm); (d) ripple ( $l = f - 3$  mm);  
(e) ripple ( $l = f + 5$  mm); (f) ripple ( $l = f - 5$  mm); (g) ripple ( $l = f + 10$  mm); (h) ripple ( $l = f - 10$  mm)

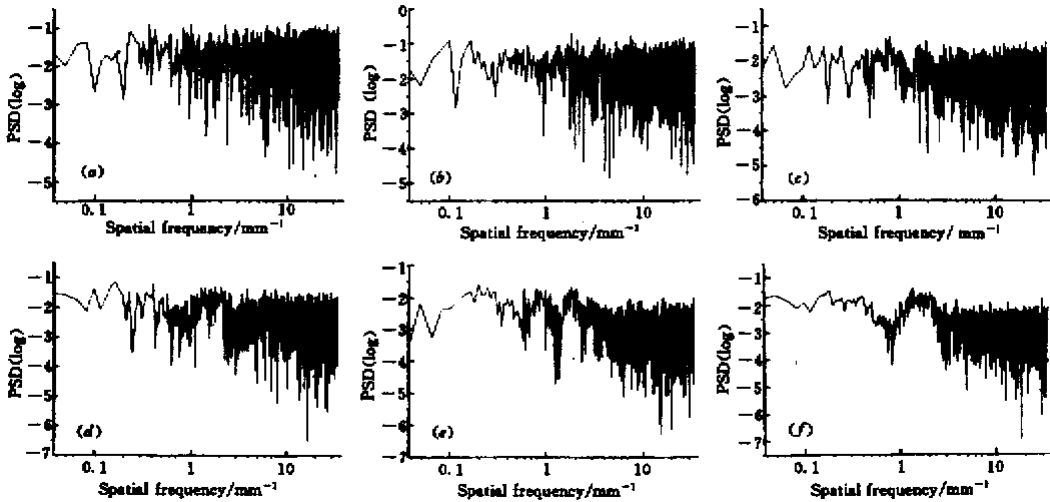


图 5 PSD 在成像系统中的传输

Fig.5 Propagation of PSD in imaging system

由图可以看到:一方面随着成像透镜通光口径的减小, PSD 分布中中频谱分量的强度不断增加,而高频谱分量的强度则下降。这点从有限口径对像的弥散作用中不难理解。另一方面,随着像距的增加

(放大倍数减小),高频谱分量的强度是下降的。

此外,由图 6 所示,在离焦的情况下,由于像面的弥散, PSD 分布中中频谱分量强度增加,而高频谱分量强度下降。

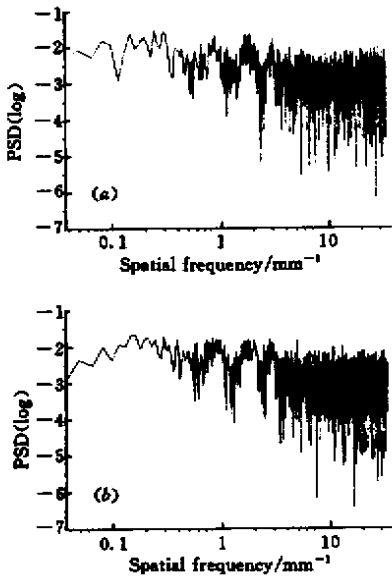


图 6 PSD 在成像系统中存在离焦时的传输  
Fig.6 Propagation of PSD in imaging system with small defocus

(a)  $f = 50 \text{ mm}$ ,  $f/D = 11.2$ , defocus + 1 mm ;  
(b)  $f = 50 \text{ mm}$ ,  $f/D = 11.2$ , defocus + 2 mm

### 3.5 望远系统

对于单透镜系统,光学传输矩阵可以写成

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 + f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & f_1 + f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中  $f_1$  和  $f_2$  分别为两个透镜的焦距。可见,在望远系统中有  $C = 0$ 。那么由式(6)和(7)可知波面 PSD 分布在望远系统中是不变的,仅仅有总体强度变化。这一点与 PSD 在自由空间中的传输是相似的。事实上,对于任何  $C = 0$  的光学系统,都可以认为 PSD 在其中具有成像性质<sup>[17]</sup>, $C = 0$  的系统还包括自由空间和  $4f$  系统。特别是真空空间滤波器,它是一种特殊的望远系统。如果没有滤波小孔,那么 PSD 分布在通过滤波器后是没有变化的,而滤波小孔的作用是将高频的角谱分量滤除,从而对 PSD 的分布函数进行截断。

## 4 结 论

PSD 在光学测量和评价中得到了越来越广泛的应用,了解具有不同 PSD 的位相微扰在波面传输中的影响和作用,在实际工作中有重要意义。特别是对于光学检测系统,分析 PSD 在其中的传输,对检

测系统的设计和构建具有指导意义,对于测量结果的准确性和可靠性也有着实际意义。

### 参 考 文 献

- 1 E. L. Church. Fractal surface finish. *Appl. Opt.*, 1988, **27** (8):1518 ~ 1526
- 2 J. M. Bennett, L. Mattsson. Introduction to surface roughness and scattering. Washington, D. C.: Optical Society of America, 1989. 28 ~ 29, 44 ~ 50
- 3 J. C. Stover. Optical scattering: Measurement and analysis. Bellingham, Washington: SPIE, 1995. Chapter 1
- 4 J. M. Elson, J. M. Bennett. Calculation of the power spectral density from surface profile data. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(1) 201 ~ 208
- 5 H. Többen, G. Ringel, F. Kratz *et al.*. The use of power spectral density (PSD) to specify optical surfaces. *SPIE*, 1996, **2775** 240 ~ 250
- 6 C. R. Wolfe, J. K. Lawson. The measurement and analysis of wavefront structure from large aperture ICF optics. *SPIE*, 1995, **2633** 361 ~ 385
- 7 D. M. Aikens, C. R. Wolfe, J. K. Lawson. The use of power spectral density (PSD) functions in specifying optics for the National Ignition Facility. *SPIE*, 1995, **2576** 281 ~ 292
- 8 D. M. Aikens. The origin and evolution of the optics specification for the National Ignition Facility. *SPIE*, 1995, **2536** 2 ~ 12
- 9 J. K. Lawson, C. R. Wolfe, K. R. Manes *et al.*. Specification of optical components using the power spectral density function. *SPIE*, 1995, **2536** 38 ~ 50
- 10 Optics and optical instrument-indications in optical drawings, in Draft International Standard ISO 10110 Part 8: Surface Texture Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization. ISO/TC 172/SC 1/WG 2
- 11 D. J. Janeczko. Power spectrum standard for surface roughness: Part I. *SPIE*, 1989, **1165** :175 ~ 183
- 12 Shaoming Wang, Daomu Zhao. The Principle of Matrix Optics. Hangzhou: Hangzhou University Publishing Company 1994. Chapter 2 (in Chinese)
- 13 Stuart A. Collins, Jr.. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9): 1168 ~ 1177
- 14 Fan Dianyuan. Optical transfer function in terms of ray matrix elements. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1981, **1**(5) 395 ~ 400 (in Chinese)
- 15 J. W. Goodman. Fourier Optics. Beijing: Science Publishing Company, 1979. Chapter 6 (in Chinese)
- 16 Fan Dianyuan. The Fresnel number in terms of ray matrix elements. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(4) 319 ~ 325 (in Chinese)
- 17 Zhongyong Liu, Xiuying Wu, Dianyuan Fan. Collins formula in frequency-domain and fractional Fourier transforms. *Opt. Comm.*, 1998, **155** 7 ~ 11