文章编号:0258-7025(2001)12-1066-05

非线性自聚焦介质中光束的非傍轴传输*

文双春**　范滇元
(高功率激光物理国家实验室,中国科学院上海光机所　上海 201800)

提要　在标量近似下,将非傍轴项近似等效为四阶空间色散和五阶非线性效应,利用变分法研究了高斯光束的传输特性。结果表明,在非傍轴情形下,高斯光束不会崩塌,而是经历聚焦–散焦的周期性传输过程;光束初始功率越高,则周期越小。此外,高斯光束的自聚焦过程可以通过改变啁啾参数来控制,正负啁啾分别使光束第一次聚焦的距离缩短和延长,但两者都使光束的聚焦–散焦的周期增大,而且啁啾值越大,周期也越大。

关键词　非傍轴光束,非线性传输,高斯光束,自聚焦
中图分类号　TN 241;O 437.5　　**文献标识码**　A

Non-paraxial Propagation of Optical Beams in Nonlinear Self-focusing Media

WEN Shuang-chun　FAN Dian-yuan
(*National Laboratory on High Power Laser and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Abstract　A non-paraxial equation for nonlinear optical propagation in the scalar approximation is derived. As a first-order correction, it is shown that the nonparaxiality can be expressed with a fourth-order spatial dispersion and fifth-order nonlinearity. By using variational approach to the modified nonlinear equation the propagation properties of Gaussian beams are obtained. It is found that the beam propagates stably with a focusing-defocusing cycle, and the beam with a higher power has a smaller cycle. It is also shown that the self-focusing process can be controlled by changing the chirp parameters. The positive (negative) chirp reduces (increases) the initial self-focusing length and both chirps increase the focusing-defocusing cycle.

Key words　nonparaxiality, nonlinear propagation, Gaussian beams, self-focusing

1　引　言

强激光通过非线性介质时出现的自聚焦现象是非线性光学中的一个基本物理问题,也一直是一个热点研究方向。在非线性 Kerr 介质中,当衍射效应与非线性效应达到平衡时,光束将在自产生的波导中传输,这种状态叫作光束的自陷。光束的自陷是一种不稳定的状态。当光束的功率超过自聚焦临界功率从而非线性作用强于衍射效应时,光束将自聚焦。Chiao 等[1]首次从理论上对光束自聚焦现象进行了分析。对这一现象的研究通常是基于在傍轴近似下导出的非线性 Schrödinger 方程。但是,非线性 Schrödinger 方程在描述光束的非线性传输方面还存在不足之处。首先,傍轴近似过高地估计了非线性相移的波导修正[2],已有结果表明,在某些情形,这种近似将给出错误的物理结果[3];其次,傍轴理论预言自聚焦光束将在一段有限的距离崩塌[4]。在崩塌点,光强趋于无穷大而光斑半径趋于零。这显然与实际的物理问题相悖。

严格地说,描述光束在自聚焦介质中的传输行为特别是在自聚焦点附近及自聚焦点以后的传输行为应该从原始的 Maxwell 方程组出发。但是,在不考虑光束的矢量效应的情形下,直接从标量 Helmholtz 方程出发,不仅可以简化分析,还可消除与实际的物理问题相悖的自聚焦崩塌问题,并获得光束非傍轴传输的有关特征。近年来,已有一些关于光束非傍轴传输的研究工作。如 Feit 等[4]最先用数值方法研究了非傍轴情形下光束的自聚焦问

* 国家高技术 863 计划资助项目(批准号:863-416-5)。
** 现工作单位:衡阳师范学院物理系。
收稿日期:2000-09-08;收到修改稿日期:2000-11-30

题，指出由于光束在自聚焦点附近已非常细小，因而傍轴近似条件已不能满足，在考虑非傍轴因素的情况下，光束的传输是稳定的；后来，文献[5,6]用数值方法，文献[7]用解析方法相继证明非傍轴可以消除光束非线性自聚焦的奇异性。我们注意到这些工作大多是限于非傍轴消除自聚焦崩塌的研究，而且由于在非线性 Schrödinger 方程中引入了非傍轴项，给解析工作带来不便，所以研究工作大多以数值模拟为主。仅有的解析工作也只限于准光学方程的最低阶自陷模在自聚焦临界功率附近的传输[7]，尚未见到具有各种不同特征参数的光束在考虑非傍轴因素的情况下的非线性传输的解析工作报道。数值方法的主要缺点在于它们不能确定各种输入光束的特征参数如光束宽度、功率和波前曲率等之间的定量关系。我们认为，既然在考虑非傍轴效应的情况下，光束的传输是稳定的，那么就可以利用自相似假设和传统的解析方法，考察任意输入光束的非线性传输行为。本文首先证明非傍轴修正项可以用高阶空间色散和高阶非线性来近似表示，然后利用变分法研究高斯光束的非傍轴传输特性。

2　非傍轴传输方程

与文献[4～7]一样，我们在标量近似范围内分析光束的非傍轴传输。在这种近似下，光在非线性 Kerr 介质中的传输遵循如下非线性 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \nabla_\perp^2 E + \frac{\omega_0^2}{c^2} n^2 E = 0 \tag{1}$$

式中 $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$，$n = n_0 + n_2 |E|^2$，$\omega_0$ 为光波在真空中的圆频率，c 为真空中的光速，n_0 为介质的线性折射率，n_2 为介质的非线性折射系数。假设标量场可以表示为 $E(x,y,z) = A(x,y,z)\exp(ikz)$，并假设 n_2 相对 n_0 来说非常小以至可以忽略 n_2 的高阶项，那么电场包络 $A(x,y,z)$ 的演化满足下列方程

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k}\nabla_\perp^2 A + i\frac{n_2}{n_0}k|A|^2 A + \frac{i}{2k}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \tag{2}$$

式中 $k = n_0\omega_0/c$。方程(2)右边最后一项是非傍轴项。如果没有这一项，那么方程(2)就是著名的非线性 Schrödinger 方程[1,2]。

由于(2)式中非傍轴项是用对传输距离 z 的偏导数表示，虽然形式上很简单，但对解析分析和数值研究很不方便。在分析光束的非傍轴传输时，一般尽量将这一项用横向导数来表示。如文献[8]用耦合模理论将非傍轴项修正到 λ/w（λ 和 w 分别为光的波长和光束宽度）的二次方；文献[9]利用多重尺度扰动法也获得了类似的修正。其实还可以用一种更简单的方法来得到非傍轴项的近似表达式。

方程(2)两边对 z 求偏导数，忽略对 z 的三阶导数并反复利用该方程，得到非傍轴项的近似表示式

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\frac{1}{4k^4}\nabla_\perp^4 A - k^2\frac{n_2^2}{n_0^2}|A|^4 A - \frac{n_2}{2n_0}\left[\nabla_\perp^2(|A|^2 A) + 2|A|^2\nabla_\perp^2 A - A^2\nabla_\perp^2 A^*\right] \tag{3}$$

上式与文献[9]利用多重尺度扰动法得到的非傍轴修正完全一致，但上述方法显然要简单得多。(3)式的物理意义是明显的，右边第一项表示四阶空间色散，第二项和第三项是高阶非线性效应，其中第二项表示五阶非线性效应，第三项表示自陡峭效应。我们一般是在光束宽度变得很小时才考虑非傍轴效应，所以(3)式这种表示说明当光束宽度不断缩小时，高阶色散和高阶非线性效应变得很重要。如果将空间域中的光束宽度与时间域中的脉冲宽度进行类比，不难理解这一点。当超短脉冲在非线性介质中传输时，脉冲宽度越窄，则高阶色散和高阶非线性效应变得越重要。这是众所周知的事实。

显然，(3)式右边三项具有同一数量级且具有同等重要性。在下面的分析中，为方便起见忽略第三项。应当指出，忽略第三项意味着削弱了高阶非线性效应的影响，但它不会从根本上影响我们所考虑的问题的结论。为了分析问题方便，有些文献只用四阶空间色散来等效非傍轴[10]，甚至等效非傍轴和矢量效应[11]。显然，这种等效不能反映非傍轴的非线性项修正。如果借鉴光束传输方法来考虑上述问题，即先考虑光束在线性介质中传输，这时方程(2)右边第二项为零；再考虑光束在非线性介质中传输而没有衍射，这时方程(2)右边第一项为零。两种情形下分别对方程(2)进行如上操作，可以发现，(3)式的前两项确实可以比较好地反映出非傍轴项的作用。

3　高斯光束的传输特性

分析非线性传输问题常用的近似解析方法有无像差近似法[12]、变分法[3,12]以及矩方法[13]等。前两种方法都必须事先给出光束的横向波形并利用自相似假设，相对来说，变分法的结果要精确些[12]；矩

方法则不需要事先对光束结构作假设,它可以比较精确地描述一般光束的传输行为。然而,在自相似假设近似成立的条件下,利用变分法可以获得关于光束演化的更多的信息[3],而且变分法不仅适用于常系数系统,还适用于更一般的变系数情形[14]。许多数值结果都显示在考虑非傍轴因素的情况下,光束的传输是稳定的[4~6]而且自相似条件是成立的[7]。这儿用变分法来研究高斯光束的演化。

首先利用如下的 Lagrangian 密度将方程(2)表达成一个变分问题

$$\mathscr{L} = ik\left(A\frac{\partial A^*}{\partial z} - A^*\frac{\partial A}{\partial z}\right) + |\nabla_\perp A|^2 + \frac{\mu_1}{8k^4}|\nabla_\perp^2 A|^2 - k^2\frac{n_2}{n_0}|A|^4 + \mu_2 k^2\frac{n_2^2}{3n_0^2}|A|^6 \tag{4}$$

注意方程(2)中的非傍轴项是用(3)式右边的前两项来表示的,为了后面分析问题方便,分别在四阶色散和五阶非线性项前面乘了系数 μ_1 和 μ_2,当需要考虑这些高阶项时可以方便地令它们等于 1,不需要考虑如在傍轴情形时,则令它们等于 0。考虑柱对称光束的传输,假设方程(2)有如下形式的高斯型试探解

$$A(r,z) = a(z)\exp\left[-\frac{r^2}{2w^2(z)} + ib(z)r^2 + i\varphi(z)\right] \tag{5}$$

式中 $r^2 = x^2 + y^2$,a,w,b,φ 分别为高斯光束的振幅、束宽、啁啾和相位,它们都是纵向距离的函数,在 $z = 0$ 处的初始值分别为 a_0,w_0,b_0,φ_0。将(5)式代入(4)式,然后(4)式两边对横向坐标积分得 Lagrangian 量

$$L = \frac{1}{2}(1 + 4b^2w^2) + ka^2w^2\left(w^2\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right) - \frac{n_2k^2a^4w^2}{4n_0} + \frac{\mu_2 n_2^2k^2a^6w^2}{18n_0^2} + \frac{\mu_1 a^2}{8k^2}\left(\frac{1}{w^2} + 8b^2w^2 + 16b^4w^6\right) \tag{6}$$

利用(6)式和最小作用量原理可得到高斯光束的特征参数所服从的 Lagrange-Euler 方程,$\partial L/\partial f - \partial(\partial L/\partial f_z)/\partial z = 0$(其中 f 分别表示 a,w,b,φ,下标 z 表示对 z 求偏导数),从而得到 a,w,b,φ 所满足的微分方程

$$-kw^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = 1 - \frac{3}{2}p + \frac{10\mu_2p^2}{9k^2w^2} + \frac{\mu_1}{8k^2}\left(\frac{3}{w^2} - 16b^4w^6 + 8b^2w^2\right) \tag{7}$$

$$2kw^4\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z} = 1 - 4b^2w^4 - p + \frac{8\mu_2p^2}{9k^2w^2} + \frac{\mu_1}{2k^2}\left(\frac{1}{w^2} - 16b^4w^6\right) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(a^2w^2) = 0 \tag{9}$$

$$kw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 2bw^2 + \frac{\mu_1(b + 4b^3w^4)}{k^2} \tag{10}$$

式中 $p = n_2k^2w_0^2a_0^2/(2n_0)$。令 $\mu_1 = \mu_2 = 0$,上述方程组即描述傍轴近似下光束参数的演化,与文献[3]的结果一致。在这种情况下,可以求出方程组的解析解。但在考虑非傍轴因素的情况下,上述方程组是很难得到解析结果的。这儿用变步长四阶 Runge-Kutta 法求解这个方程组。

图 1 示出了傍轴($\mu_1 = \mu_2 = 0$)和非傍轴($\mu_1 = \mu_2 = 1$)情况下光束传输轴上强度随传输距离的变化关系。这儿采用了文献[4]的参数,传输距离用波长来归一化,波长 $\lambda = 1.32$,高斯光束初始半束宽 $w_0 = 2.5$,初始强度 $I_{\max} = a_0^2 = 1.0$,$b_0 = 0$,$\varphi_0 = 0$,$n_0 = 1$,$n_2 = 0.015$。这儿 a_0^2 和 n_2 的绝对单位是不重要的,重要的是它们的积,它反映了非线性对折射率变化的贡献。从图 1 看出,在傍轴近似下,光束在 $z \approx 60\lambda$ 处崩塌即形成自聚焦点;而在非傍轴情况下,光束只在 $z \approx 68\lambda$ 处强度达到最大值,然后光强逐渐减弱,表明光束通过一个焦点然后开始散焦。图 1 所示结果与文献[4]的数值结果符合较好,尤其在定性方面。这说明我们的解析结果能够较好地描述非傍轴光束的传输特性。

图 2 和图 3 分别示出了非傍轴传输情形下轴上光强和光束归一化宽度随传输距离的变化关系。不同的曲线分别对应不同的非线性折射率值,即等价地对应不同的光束初始功率。其中 $\lambda = 1$,$w_0 = 5$,$I_{\max} = a_0^2 = 1.0$,$b_0 = 0$,$\varphi_0 = 0$,$n_0 = 1$,n_2 分别等于(a) 0.005,(b) 0.01,(c) 0.015。图 2 和图 3 清楚地表明,如果光束的初始功率超过自聚焦临界功率,那么光束经历聚焦 - 散焦的周期性传输过程,光束的初始功率越大,则周期越小。这种多焦点周期性图景充分说明非傍轴光束传输的稳定性。

图 4 所示是具有不同的初始啁啾的高斯光束在非傍轴传输情形下轴上光强随传输距离的变化关系。其中 $n_2 = 0.015$,初始啁啾 φ_0 分别为(a) 0.04(对应负啁啾),(b) 0,(c) -0.04(对应正啁

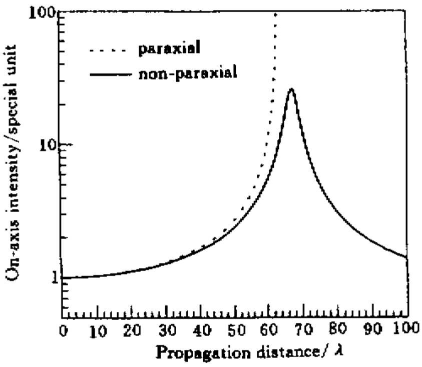

图 1　傍轴和非傍轴情况下光束轴上强度随传输距离的变化关系

Fig. 1　Variation of on-axis intensity with propagation distance in the cases of paraxial and non-paraxial propagation, respectively

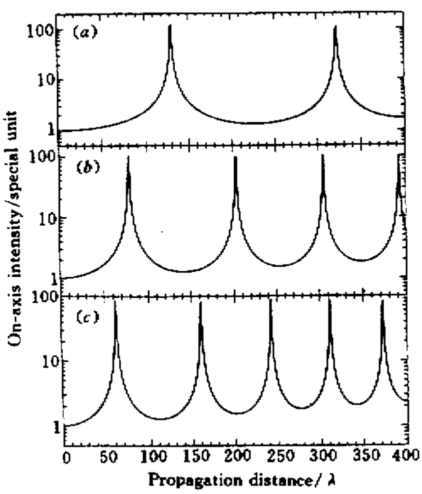

图 2　非傍轴传输情形下轴上光强随传输距离的变化关系，图示三种情形分别对应不同的 n_2 值

(*a*) 0.005；(*b*) 0.015；(*c*) 0.02

Fig. 2　On-axis intensity as a function of propagation distance in the case of non-paraxial propagation for three values of n_2

(*a*) $n_2 = 0.005$；(*b*) $n_2 = 0.015$；(*c*) $n_2 = 0.02$

啾)。其他参数同图 2 和图 3。由图 4 可看出，负啁啾使光束第一个自聚焦点的位置后移；而正啁啾使光束第一个自聚焦点的位置提前。负啁啾和正啁啾都使光束的焦点间隔变疏，计算还表明，啁啾值越大，则焦点间隔越疏即聚焦-散焦的周期越大。说明可以通过改变高斯光束的初始啁啾值来控制光束的自聚焦过程。

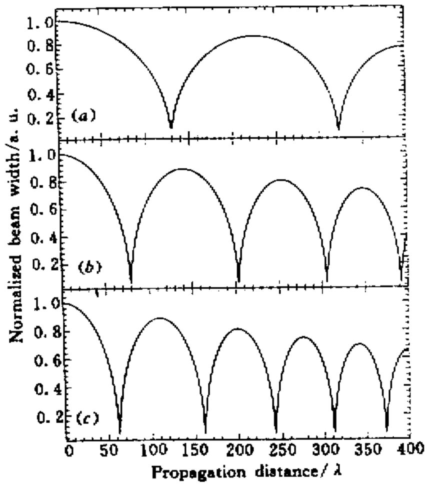

图 3　非傍轴传输情形下归一化光束宽度随传输距离的变化关系，图示三种情形分别对应不同的 n_2 值

(*a*) 0.005；(*b*) 0.015；(*c*) 0.02

Fig. 3　Normalized beam width as a function of propagation distance in the case of non-paraxial propagation for three values of n_2

(*a*) $n_2 = 0.005$；(*b*) $n_2 = 0.015$；(*c*) $n_2 = 0.02$

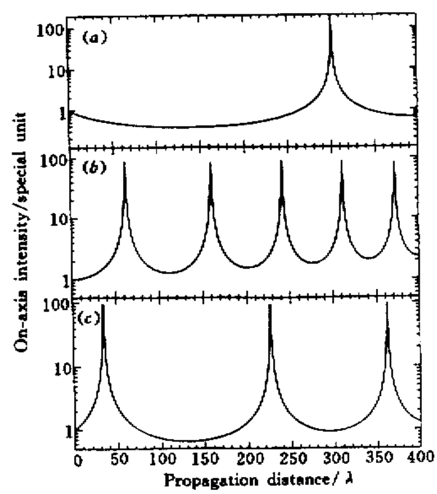

图 4　具有不同的初始啁啾的高斯光束在非傍轴传输情形下轴上光强随传输距离的变化关系，图示三种情形分别对应不同的初始啁啾 φ_0 值

(*a*) 0.04；(*b*) 0；(*c*) －0.04

Fig. 4　On-axis intensity as a function of propagation distance in the case of non-paraxial propagation for three values of initial chirp

(*a*) $\varphi_0 = 0.04$；(*b*) $\varphi_0 = 0$；(*c*) $\varphi_0 = -0.04$

4 结论和讨论

将非傍轴用高阶空间色散和高阶非线性效应来表示，用解析方法得到了在非傍轴情形下高斯光束的非线性传输特性。结果表明，引入非傍轴修正可以从根本上改变光束的传输特性。我们的结果与文献[4]的数值结果在定性方面是完全一致的。其实文献[4]的数值模拟中对非傍轴项的近似与我们对非傍轴项的修正是同一数量级，这一点可以从对 Helmholtz 方程数值解的进一步分析中看出[15]。应当指出，我们的解析结果与文献[4]的数值结果在定量方面有一定差别，这种差别与变分法和数值法之间的固有差别有关。在傍轴情形，变分法在预言光束自聚焦的临界功率方面与数值模拟有大约20%的差别。但变分法所得到的解析结果确实给我们提供了很多光束非线性传输的信息。

致谢 第一作者感谢与钱列加研究员、杨军博士后的有益讨论。

参 考 文 献

1 R. H. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes. Self-trapping of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **13**(9): 479～482

2 D. Anderson, M. Bonnedal. Variational approach to nonlinear self-focusing of Gaussian laser beams. *Phys. Fluids*, 1979, **22**(1): 105～109

3 M. Karlsson, D. Anderson, M. Desaix *et al.*. Dynamic effects of Kerr nonlinearity and spatial diffraction on self-phase modulation of optical pulses. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(18): 1373～1375

4 M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr.. Beam nonparaxiality, filament formation, and beam breakup in the self-focusing of optical beams. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1988, **5**(3): 633～640

5 N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo. Does the nonlinear Schrödinger equation correctly describe beam propagation? *Opt. Lett.*, 1993, **18**(6): 411～413

6 J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev. Description of the self-focusing and collapse effects by a modified nonlinear Schrödinger equation. *Opt. Comm.*, 1993, **101**(3-4): 223～230

7 G. Fibich. Small beam nonparaxiality arrests self-focusing of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(23): 4356～4359

8 B. Crosignani, P. Di Porto, A. Yariv. Nonparaxial equation for linear and nonlinear optical propagation. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(11): 778～780; *Errata*, 1997, **22**(23): 1820

9 S. Blair, K. Wagner. (2+1)-D propagation of spatio-temporal solitary waves including higher-order corrections. *Opt. Quantum Electron.*, 1998, **30**(7-10): 697～738

10 V. I. Kerman. Stabilization of soliton instabilities by higher-order dispersion: fourth-order nonlinear Schrödinger-type equation. *Phys. Rev. E*, 1996, **53**(2): R1336～R1339

11 K. Hayata. Why are wave collapses suppressible in a vector theory of self-focusing? *Jpn. J. Phys. Soc.*, 1996, **65**(6): 1123～1124

12 J. T. Manassah, B. Gross. Comparison of the paraxial-ray approximation and the variational method solutions to the numerical results for a beam propagation in a self-focusing Kerr medium. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(14): 976～978

13 L. Berge. Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves. *Phys. Rep.*, 1998, **303**(5/6): 259～370

14 Wen Shuangchun, Xu Wencheng, Guo Qi *et al.*. Evolution of solitons of nonlinear Schrödinger equation with variable parameters. *Science in China A* (中国科学 A 辑), 1997, **27**(10): 949～953 (in Chinese)

15 M. D. Feit, J. A. Fleck. Jr.. Light propagation in graded-index optical fibers. *Appl. Opt.*, 1978, **17**(24): 3990～3998