

湍流尺度对大气成像系统分辨率的影响*

张逸新 孙 寅

(无锡轻工业大学计算科学与信息传播系 无锡 214036)

提要 运用湍流大气的 Andrews 折射率谱近似模型从理论上分析了大气成像系统的光学传递函数并研究了有限湍流尺度(湍流内、外尺度)对湍流大气中成像系统光学分辨率的影响。结果表明应该考虑湍流尺度对大气系统成像的作用。采用近似 Andrews 折射率谱模型所得结果与采用纯指数谱计算结果有明显差别。

关键词 湍流, 成像, 折射率谱, 大气光学

由于激光雷达和自适应光学研究的需要,对大气湍流的内、外尺度对光波传播的影响已进行了广泛研究^[1~3],其中包括内尺度对大气光闪烁的影响^[1]、湍流外尺度对大气成像系统的积分分辨率的影响^[2]等。此外,对于不同曝光时间长度^[4]和大气湍流条件^[5]等情况下大气成像系统的成像性能也已作了相当广泛的研究。但研究光波在大气中的传播与成像规律仅采用不考虑湍流内、外尺度影响的 Kolmogorov 折射率谱是不够的,应该考虑包含湍流内、外尺度参数的折射率谱。Hill^[6]提出了一个被称作为 Hill 谱的折射率谱,但是这个谱带有不易用于进行理论分析的缺点。Andrews 通过数值模拟比较提出了 Hill 谱的近似谱——Andrews 谱^[6]。

本文将依据 V. V. Voitsekhovich 等对包含湍流外尺度的三种折射率谱^[7](即指数谱、Karman 谱和 Greenwood 谱)影响系统大气成像的研究结果,提出了用近似 Andrews 折射率谱研究大气成像系统的光学传递函数和积分分辨率。

1 近似 Andrews 折射率谱

Andrews 通过数值模拟比较认为湍谱(折射率谱)^[6]可表示为

$$\Phi_A(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left[1 + a_1 \left| \frac{\kappa}{\kappa_1} \right| - a_2 \left| \frac{\kappa}{\kappa_1} \right|^{7/6} \right] \frac{\exp(-\kappa^2 / \kappa_1^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \quad (1)$$

这里 $\kappa_0 = 1/L_0$ (或 $\kappa_0 = 2\pi/L_0$), $a_1 = 1.0802$, $a_2 = 0.254$, $\kappa_1 = 3.3/l_0$, C_n^2 为折射率起伏结构常数, L_0 为湍流外尺度, l_0 为湍流内尺度。分析式(1),可以把 $\Phi_A(\kappa)$ 表达为包含外尺度的 $\Phi[L_0, \kappa]$ 和包含内尺度的 $\Phi[l_0, \kappa]$ 的两因子之积,即 $\Phi_A(\kappa) = \Phi[L_0, \kappa] \Phi[l_0, \kappa]$ 。其中

$$\Phi[L_0, \kappa] = 0.033 C_n^2 \frac{1}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}} \quad (2)$$

* 江苏省自然科学基金(合同号: BK97182)资助项目。

收稿日期: 1999-08-13; 收到修改稿日期: 1999-

$$\Phi[l_0, \kappa] = [1 + a_1[\kappa/\kappa_1] - a_2[\kappa/\kappa_1]^{7/6}] \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2) \quad (3)$$

显然, 式(2)正是目前在光波大气传输与成像问题研究中广泛采用的包含湍流外尺度的湍谱——Karman 谱^[6,7]的一种常用形式 $\Phi_n(\kappa)$, 即 $\Phi_n(\kappa) = \Phi[l_0, \kappa]$ 。

文献[7]就应用已提出的含有湍流外尺度的 Karman 谱 $\Phi_n(\kappa)$, 指数谱 $\Phi_e(\kappa)$ 和 Greenwood 谱 $\Phi_g(\kappa)$ 等三种谱研究光波大气成像产生的误差进行了研究, 研究表明, 指数谱和 Karman 谱几乎等同地反映了大气湍流对系统成像的影响。为此, 由等量代换原理我们用指数谱 $\Phi_e(\kappa)$ 替代(4)式中的 Karman 谱 $\Phi_n(\kappa)$ 来研究系统成像分辨率问题, 由此得出下列湍谱

$$\Phi_A(\kappa) = \Phi_e(\kappa) [1 + a_1[\kappa/\kappa_1] - a_2[\kappa/\kappa_1]^{7/6}] \quad (4)$$

其中 $\Phi_e(\kappa)$ 为指数谱

$$\Phi_e(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3} [1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)] \quad (5)$$

2 光学传递函数和积分分辨率

湍流大气中成像系统的分辨率可用下列积分分辨率来描述^[6]

$$\mathcal{R} = 2\pi \int_0^\infty \langle H(\Omega) \rangle \Omega d\Omega \quad (6)$$

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示取系综平均, $H(\Omega)$ 为大气成像系统的光学传递函数。当波长为 λ 的单色光波在地球大气中通过厚度为 Z 的湍流层时, 成像系统的短期和长期曝光统计平均光学传递函数近似为^[4] $\langle H(\Omega) \rangle_{SE}$ 和 $\langle H(\Omega) \rangle_{LE}$

$$\langle H(\Omega) \rangle_{LE} = H_0(\Omega) \exp\left[-\frac{1}{2} D(\lambda\Omega)\right] \quad (7)$$

$$\langle H(\Omega) \rangle_{SE} = H_0(\Omega) \exp\left[-\frac{1}{2} \left[D(\lambda\Omega) - \frac{1}{2} (\lambda\Omega)^2 \sigma_a^2 \right]\right] \quad (8)$$

其中下标 LE 和 SE 分别表示长期和短期曝光, $\Omega = f\nu$, f 为薄透镜的焦距, ν 为傅氏空间频率, $H_0(\Omega)$ 是成像系统薄透镜的光学传递函数^[6]

$$H_0(\Omega) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left[\frac{\Omega}{\Omega_0}\right] - \frac{\Omega}{\Omega_0} \sqrt{1 - \left[\frac{\Omega}{\Omega_0}\right]^2} \right] & \Omega \leq \Omega_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\Omega_0 = \pi D_0/\lambda$ 为角频率, D_0 为接收系统入瞳直径, σ_a^2 为成像系统成像孔径平面上光波波面起伏方差^[8]

$$\sigma_a^2 = \frac{64}{D_0^2} \int_0^1 \frac{4}{\pi} [(3u - 2u^3) \sqrt{1 - u^2} - \arccos u] D_s(uD_0) u du \quad (10)$$

这时 $D(\rho)$ 是波结构函数, $D(\rho) = D_s(\rho) + D_x(\rho)$ 。且 $D_s(\rho)$ 表示相位结构函数, $D_x(\rho)$ 表示对数振幅结构函数, $D(\rho)$ 和 $D_s(\rho)$ 分别由下面等式表示

$$D(\rho) = 8\pi k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_A(\kappa) \kappa d\kappa \quad (11)$$

$$D_s(\rho) = 8\pi k^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] [1 + (\kappa r_F)^{-2} \sin^2(\kappa r_F)] \Phi_A(\kappa) \kappa d\kappa \quad (12)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为光波波数, r_F 为 Fresnel 长度, $r_F = (z/k)^{1/2}$, $J_0(\kappa\rho)$ 为零阶贝塞尔函数。

下面即用近似 Andrews 湍谱简化波结构函数, 把式(4)代入式(11), 通过计算可得到

$$D(\rho) = 6.16r_0^{-5/3} \int_0^\infty d\kappa \kappa^{-8/3} [1 - J_0(\kappa\rho)] [1 - \exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)] \left[1 + a_1 \left[\frac{\kappa}{\kappa_1} \right] - a_2 \left[\frac{\kappa}{\kappa_1} \right]^{7/6} \right] =$$

$$D_1(\rho) + D_2(\rho) + D_3(\rho) \quad (13)$$

其中

$$D_1(\rho) = 20.56(r_0\kappa_0)^{-5/3} \left[1 + 0.335(\rho\kappa_0)^{5/3} - {}_1F_1 \left[-\frac{5}{6}; 1; -\frac{\kappa_0^2\rho^2}{4} \right] \right]$$

$$D_2(\rho) = 12.32 \frac{a_1(r_0\kappa_0)^{-2/3}}{\kappa_l\kappa_0} \left[1 + 0.643(\rho\kappa_0)^{2/3} - {}_1F_1 \left[-\frac{1}{3}; 1; -\frac{\kappa_0^2\rho^2}{4} \right] \right]$$

$$D_3(\rho) = -15.09 \frac{a_2(r_0\kappa_0)^{-1/2}}{\kappa_l^{7/6}\kappa_0^{13/6}} \left[1 + 0.78(\rho\kappa_0)^{1/2} - {}_1F_1 \left[-\frac{1}{4}; 1; -\frac{\kappa_0^2\rho^2}{4} \right] \right] \quad (14)$$

这里 ${}_1F_1(a, b, x)$ 为合流超几何函数, 参数 r_0 为 Fried 半径^[4]。

实际使用的成像系统的直径 D_0 往往远小于湍流外尺度 L_0 , 即 $D_0 \ll L_0$ 。此外, 我们所观察的传输场处于 $\rho \leq D_0/2$ 范围内, 由此可以把 ρ/L_0 (即 $\rho^2\kappa^2/4$) 作为小量展开式(14)中的合流超几何函数为^[9]

$${}_1F_1 \left[a; \nu; -\rho^2\kappa^2/4 \right] \approx 1 - a\rho^2\kappa^2/4\nu \quad (15)$$

由上述近似, 式(14)近似为

$$D_1(\rho) \approx 20.56(r_0\kappa_0)^{-5/3} [0.335(\rho\kappa_0)^{5/3} - 0.208\kappa_0^2\rho^2]$$

$$D_2(\rho) \approx 12.47 \frac{a_1(r_0\kappa_0)^{-5/3}\kappa_0}{\kappa_l} [0.705(\rho\kappa_0)^{2/3} - 0.083\kappa_0^2\rho^2] \approx 8.79 \frac{a_1(\rho/r_0)^{2/3}}{\kappa_l r_0}$$

$$D_3(\rho) \approx -15.09 \frac{a_2(r_0\kappa_0)^{-5/3}\kappa_0^{7/6}}{\kappa_l^{7/6}} [0.78(\rho\kappa_0)^{1/2} - 0.063\kappa_0^2\rho^2] \approx -11.77 \frac{a_2(\rho/r_0)^{1/2}}{\kappa_l^{7/6}r_0} \quad (16)$$

由式(17)可得到长曝光光学传递函数和长曝光积分光学分辨率

$$\langle H(\Omega) \rangle_{LE} \approx H_0(\Omega) \exp \left[-3.34 \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{5/3} \left[1 - 1.48 \left[\frac{\lambda\Omega}{L_0} \right]^{1/3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{8.79a_1}{\kappa_l r_0} \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{2/3} - \frac{11.77a_2}{\kappa_l^{7/6}r_0^{7/6}} \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{1/2} \right] \right] \quad (17)$$

$$\mathcal{R}_{LE} \approx 2\pi \int_0^\infty \Omega d\Omega H_0(\Omega) \exp \left[-3.34 \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{5/3} \left[1 - 1.48 \left[\frac{\lambda\Omega}{L_0} \right]^{1/3} \right] - \left[\frac{4.39a_1}{\kappa_l r_0} \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{2/3} - \frac{5.89a_2}{\kappa_l^{7/6}r_0^{7/6}} \left[\frac{\lambda\Omega}{r_0} \right]^{1/2} \right] \right] \quad (18)$$

在式(18)中作变量代换 $u = \Omega/\Omega_0 = \lambda\Omega/D_0$, 有

$$\mathcal{R}_{LE} = 4 \left[\frac{D_0}{\lambda} \right]^{21} \int_0^1 u [\cos^{-1}u - u \sqrt{1-u^2}] \exp \left[-3.44 \left[\frac{D_0}{r_0} \right]^{5/3} u^{5/3} \left[1 - 1.48 \left[\frac{D_0}{L_0} \right]^{1/3} u^{1/3} \right] \right] \cdot$$

$$\exp \left[-\frac{4.39a_1}{\kappa_l r_0} \left[\frac{D_0}{r_0} \right]^{2/3} u^{2/3} + \frac{5.89a_2}{\kappa_l^{7/6}r_0^{7/6}} \left[\frac{D_0}{r_0} \right]^{1/2} u^{1/2} \right] du \quad (19)$$

通过计算 $\langle H(\Omega) \rangle_{LE}$ 和 \mathcal{R}_{LE} 分析湍流内外尺度对系统积分分辨率和光传递函数的影响。目前公认的湍流内尺度处于 $0.0025 \leq l_0 \leq 0.012$ m 的范围内, 文献[1]测量指出在凌晨湍流内尺度可达到 0.03 m。所以本文在 $L_0 = 15r_0$, $D_0 = 3r_0$ 和 l_0 取值 0.0025~0.03 m 的条件下分析湍流内尺度对 $\langle H(\Omega) \rangle_{LE}$ 的影响。由计算得到图 1(a)~(c) 所示的 $\langle H(\Omega) \rangle_{LE}$ 受湍流尺度的影响规律。由图可见不仅湍流外尺度影响系统的成像质量和分辨率^[2], 而且湍流内尺度也影响系统的成像质量与分辨率, 并且内尺度的大小影响到外尺度对 $\langle H(\Omega) \rangle_{LE}$ 的作用, 由图可见内尺度较大时对外尺度作用的影响比内尺度较小时的影响为大。该结果的物理意义十分明确,

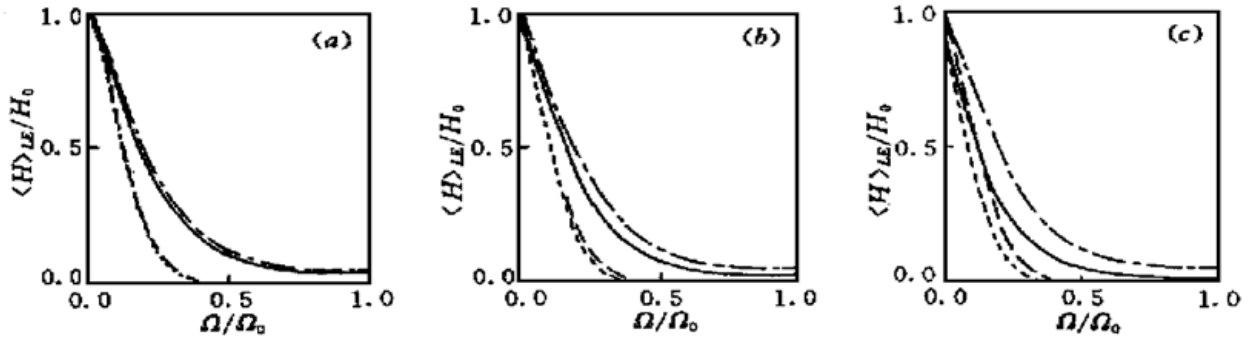


图 1 长曝光光学传递函数与湍流尺度的关系

—: $\Phi_A(\kappa)$ 计算结果;: $\Phi_A(\kappa)$ 取 $L_0 = 0$ 的结果; - · - ·: $\Phi_B(\kappa)$ 计算结果; ----: $\Phi_B(\kappa) = 0.033C_n^2 \kappa^{-11/3}$ 的计算结果

Fig. 1 Relation between the long exposure OTF and finite scales

—: calculation result of $\Phi_A(\kappa)$;: result of $\Phi_A(\kappa)$ with $L_0 = 0$; - · - ·: calculation result of $\Phi_B(\kappa)$; ----: calculation result of $\Phi_B(\kappa) = 0.033C_n^2 \kappa^{-11/3}$. (a) $l_0 = 0.0025$ mm; (b) $l_0 = 0.012$ mm; (c) $l_0 = 0.03$ mm

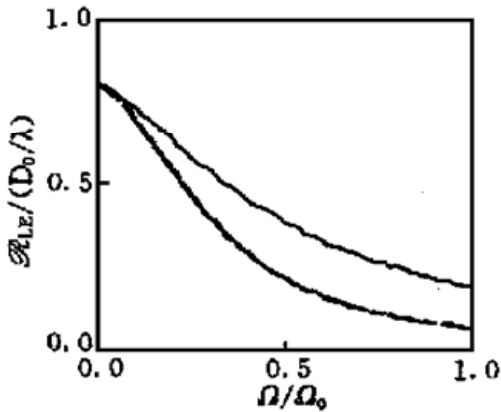


图 2 长曝光情况下积分分辨率与 Ω/Ω_0 的关系

—: $\Phi_A(\kappa)$ 计算结果; - · - ·: $\Phi_A(\kappa)$ 取 $L_0 = 0$ 的结果; ----: $\Phi_B(\kappa) = 0.033C_n^2 \kappa^{-11/3}$ 的计算结果

Fig. 2 Integral resolution for the long exposure case as a function of Ω/Ω_0

—: calculation result of $\Phi_A(\kappa)$; - · - ·: result of $\Phi_A(\kappa)$ with $L_0 = 0$; ----: calculation of $\Phi_B(\kappa) = 0.033C_n^2 \kappa^{-11/3}$

在均匀各向同性惯性子区间内湍流对光波的作用规律是基本相同的。但是,湍流尺度为 $l > L_0$ 和 $l < l_0$ 区域的大气湍流对光波的作用规律与惯性子区间湍流对光波的作用间会有很大差别,这些差别将导致通过惯性子区间的光波振幅及位相与通过 $l > L_0$ 及 $l < l_0$ 的光波的振幅与位相有差别。因此可以把小于湍流内尺度的湍涡看作分布在各向同性湍流内的直径为 l_0 的“不均匀”散射体,其作用是增加像面的“噪声”。所以湍流的内尺度越大,在垂直于光波传输方向的平面内受扰动的区域越大,从而成像系统的质量越差。图 2 表示湍流外尺度对成像积分分辨率有较大的影响而湍流高波数跃变因子则产生的影响不大。

至于短曝光成像情况,注意到在近场 ($r_F \ll D_0, L_0$) 和远场 ($r_F \gg D_0, L_0$) 条件下,式(10)和式(12)可近似为^[2]

$$D_s(\rho) = \alpha D(\rho) \begin{cases} \alpha = 1, & (r_F \ll D_0, L_0) \\ \alpha = \frac{1}{2}, & (r_F \gg D_0, L_0) \end{cases} \quad (20)$$

和
$$\sigma_\alpha^2 \approx \frac{64\alpha}{D_0^2} \int_0^1 \frac{4}{\pi} [(3u - 2u^3) \sqrt{1 - u^2} - \cos^{-1} u] D(uD_0) u du \quad (21)$$

短期曝光条件下光学传递函数 $\langle H \rangle_{SE}$ 为

$$\begin{aligned} \langle H(\Omega) \rangle_{SE} \approx & H_0(\Omega) \exp \left[-3.34 \left[\frac{\lambda \Omega}{r_0} \right]^{5/3} \left| 1 - 1.48 \left[\frac{\lambda \Omega}{L_0} \right]^{1/3} \right| - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[\frac{8.79a_1}{\kappa r_0} \left[\frac{\lambda \Omega}{r_0} \right]^{2/3} - \frac{11.77a_2}{\kappa_l^{7/6} r_0^{7/6}} \left[\frac{\lambda \Omega}{r_0} \right]^{1/2} \right] \right] \times \\ & \exp \left[\frac{1}{4} (\lambda \Omega)^2 \frac{64\alpha}{D_0^2} \int_0^1 \frac{4}{\pi} [(3u - 2u^3) \sqrt{1 - u^2} - \cos^{-1} u] D(uD_0) u du \right] \quad (22) \end{aligned}$$

由式(22)可以通过数值分析研究积分分辨率 \mathcal{R}_{SE} 。

3 结 论

本文通过提出近似 Andres 湍流谱和分析长曝光光学传递函数研究了湍流尺度对大气成像系统长曝光积分分辨率的影响,重点研究了湍流内尺度的作用。结果表明当成像系统入瞳 D_0 远小于湍流外尺度的成像环境下,湍流内、外尺度对系统成像都有影响,有限内尺度总体作用降低系统成像的分辨率,且随着内尺度的增加这种分辨率降低的作用加剧。由此得出结论,在对高分辨大气成像系统的分辨率估算过程中应该考虑湍流内尺度的作用。

参 考 文 献

- 1 A. Consortini, F. Cochetti, J. H. Churnside *et al.*. Inner scale effect on irradiance variance measured for weak-to-strong atmospheric scintillation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(11): 2354~ 2362
- 2 S. S. Chesnokov, S. E. Skipetrov. Optical resolution through atmospheric turbulence with finite outer scale. *Opt. Commun.*, 1997, **141**(3, 4): 113~ 117
- 3 V. V. Voitsekhovich, S. Guevas. Adaptive optics and the outer scale of turbulence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(11): 2523~ 2531
- 4 D. L. Fried. Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10): 1372~ 1379
- 5 D. L. Fried. Limiting resolution looking down through the atmosphere. *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, **56**(10): 1380~ 1384
- 6 Zhang Yixin, Chi Zeying. *Lightwave Propagation and Imaging in the Atmosphere*. Beijing: National Defence Industry Press, 1997. 13~ 17 (in Chinese)
- 7 V. V. Voitsekhovich. Outer scale of turbulence: comparison of different models. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(6): 1346~ 1353
- 8 D. L. Fried. Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am.*, 1965, **55**(11): 1427 ~ 1435
- 9 Wang Zhuxi, Guo Dunren. *An Introduction to Special Functions*. Beijing: Science Press, 1979, Chap. 6 (in Chinese)

Effects of the Scale of Turbulence on Optical Resolution of Imaging System in Tubulence

Zhang Yixing Sun Ying

(*Department of Computing Science & Information Communication,
Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036*)

Abstract The OTF of the atmosphere imaging system is calculated and the effects of the scale of turbulence on the integral resolution are analyzed by using the approximate Andrews model of refractive index fluctuation. The results obtained for the approximate Andrews modle turbulence spectrum significantly differ from those obtained for a pure power-law turbulence spectrum.

Key words turbulence, imaging, power spectrum of refractive index fluctuation, atmospheric optics