

# 对数可饱和非线性介质对 高斯光束的影响

李大义 唐永林 陈建国 康俊 张科军

(四川大学光电系 成都 610064)

**提要** 由非线性传播方程导出对数可饱和非线性介质(LSNM)中高斯光束参量变化所遵循的耦合方程,在输入参量偏离孤子条件较小的情况下导出了高斯光束变化的解析表达式,在一般情况下对高斯型呼吸模式的主要特征进行了分析。

**关键词** 对数可饱和非线性介质,空间孤子,呼吸模式

## 1 引言

非线性介质中脉冲光束传输的规律一直是一个颇受关注的问题<sup>[1-4]</sup>。前人已经对克尔介质进行了大量的考察,在二维(一个横向  $x$  和一个传播方向  $z$ ) 情况下获得了传播方程的解析解——即双曲正割形式的孤子解<sup>[5]</sup>。不过,对三维情形的求解还需借助数值计算的方法。文献[1]说明了在克尔介质中产生高斯光束自陷的可能性,并指明了这种空间孤子是不稳定的。Snyder 等<sup>[6]</sup>考虑了具有理想饱和特征的非线性介质,当光束在该介质中感应出阶跃折射率轮廓的光波导,在光束强度的分布等于波导的模式轮廓时,直接借用为人们熟悉的线性光波导的物理知识,不直接解非线性传播方程,首次得到了 2D 空间自引导光束严格解析解。近年的研究表明,不少非线性介质具有对数可饱和特性,因而在这种介质中产生的光束自陷(即空间孤子)和光束非辐射传播的呼吸模式引起了研究者的重视。Snyder 等<sup>[7]</sup>报道了在对数可饱和非线性介质(LSNM)中形成高斯型空间孤子的可能性,并对相关的呼吸模式进行了探索。Tikhonenko<sup>[8]</sup>从实验上观察到了椭圆截面的高斯光束在 LSNM 中形成亮空间孤子的呼吸模式(mighty morphing soliton),Christodoulides 等<sup>[9,10]</sup>更进一步证明了部分非相干光束也可在 LSNM 中形成高斯型空间孤子。

通常用数值方法求解非线性传播方程,文献[11]用势函数分析法,描述了 LSNM 空间孤子的呼吸模式,并计算呼吸模式光束的光束半径、波面曲率半径、呼吸周期等参量。本文从非线性传播方程出发导出了在 LSNM 中传播的高斯光束参量变化所遵循的耦合方程组。在确定了形成空间孤子的条件以后,先在输入参量小偏离孤子条件的情况下解析求解了这组耦合方程,分析了在 LSNM 中形成的呼吸模式的性质。对于输入参量偏离孤子条件较大的情况,利用图解的方法进行了一般的讨论,研究了呼吸模式的主要特征。

## 2 耦合方程组

把振幅为  $A(x, y, z, t)$ , 波矢为  $\vec{k}$ , 中心频率为  $\omega_0$  的沿  $z$  方向传播的近轴线偏振电场代入麦克斯韦方程可以求得<sup>[4]</sup>

$$i\partial A/\partial z + (1/2k_0)(\partial^2 A/\partial x^2 + \partial^2 A/\partial y^2) - (k_z/2)\partial^2 A/\partial \tau^2 + k_0(\delta n/n_0)A = 0 \quad (1)$$

在推导上式时, 假设电场包络  $A$  沿  $z$  方向慢变, 波矢  $\vec{k}$  沿传播方向  $z$ , 其大小为  $2\pi m/\lambda$ ,  $n$  为折射率,  $\lambda$  为真空波长。上式中  $\delta n$  为非线性效应引起的折射率变化,  $n_0$  为线性折射率,  $\tau = t - k_{1z}z$ ,  $k_m = (\partial^m k/\partial \omega^m)_{\omega=\omega_0}$ ,  $m = 0, 1, 2$ 。一般来说, 光强  $I$  远大于 LSNM 的阈值  $I_t$ , 因而 LSNM 的  $\delta n$  可表示为<sup>[5]</sup>

$$\delta n = n_2 \ln(I/I_t) \quad (2)$$

式中  $n_2$  为非线性系数。

(1) 式描述了在衍射、色散和非线性效应相互作用下, 光脉冲传播的时空变化, 当我们研究几何空间中传播的激光束时, (1) 式就变成了一个与  $\tau$  无关的三维问题。为简单起见, 本文主要研究圆对称高斯光束。在这种情况下, 按照求解这类问题的标准方法<sup>[11]</sup>, 将高斯光束的普遍形式写为

$$A(r, z) = B(z) \exp\{-r^2/2\sigma^2(z) + i[\alpha(z) + \beta(z)r^2]\} \quad (3)$$

将(3)代入(1)式后, 由于横向  $r$  是任意的, 在比较实、虚部各  $r$  幂次的系数后可求得

$$dB/dz + 2\beta B/k_0 = 0 \quad (4a)$$

$$d\sigma/dz - 2\beta\sigma/k_0 = 0 \quad (4b)$$

$$d\alpha/dz + 1/(k_0\sigma^2) - (k_0 n_2/n_0) \ln(B^2/I_t) = 0 \quad (4c)$$

$$d\beta/dz - 1/(2k_0\sigma^4) + (2\beta^2/k_0) + k_0 n_2/(n_0\sigma^2) = 0 \quad (4d)$$

于是, 得到了描述高斯光束特征参量在 LSNM 中变化的耦合方程组。一旦求得了这些方程组的解, 就可以分析 LSNM 中传播的高斯光束的变化了。

联立(4a)和(4b)可证明  $B(z)\sigma(z) = \text{常数}$ , 换言之, 有

$$B(z) = B_{in}\sigma_{in}/\sigma(z) \quad (5)$$

式中下标 in 表示参量在 LSNM 的输入界面处的取值。上式与一般文献中人们常常设定的高斯光束的幅度的形式是一致的。由(4b)和(4d)可导出

$$d^2 a/dZ^2 - 1/a^3 + 1/a = 0 \quad (6)$$

其中  $a$  和  $Z$  被称为归一化光束尺寸和传播距离, 其定义为

$$a = \sigma/\sigma_c \quad (7a)$$

$$Z = z/z_p \quad (7b)$$

式(7a), (7b)中

$$\sigma_c = (n_0/2n_2k_0^2)^{1/2} \quad (8a)$$

$$z_p = n_0/(2k_0 n_2) \quad (8b)$$

显然,  $a = 1$  是方程(6)的一个解。当入射高斯光束的束腰与 LSNM 的界面重合(即  $da/dz = 0$ ) 且腰斑半径为  $\sigma_c$ (即  $a_{in} = 1$ ) 时, 高斯光束在非线性介质中传播时将形成空间孤子, 即在传播过程中光束尺寸不变, 波阵面恒为平面。从形式上看(6)式并不复杂, 但要想一般性地求解则需借助数值计算。不过, 在入射高斯光束的参量与孤子条件相差不大时, 是可以获得(6)式的近似解析解的。

### 3 近似解析解

入射高斯光束参量与孤子条件有一个小偏离可能表现为(1) 高斯光束在束腰处入射,但束腰尺寸与  $\sigma_c$  略有差异;(2) 高斯光束束腰与 LSNM 的输入端面间有一个微小距离,此时  $\sigma'_{in}$ ( $\sigma$  对  $z$  的一阶导数) 不为零。当然,也可能上述两种情况同时存在,并可以将它们看作对孤子的干扰。一般来说,在知道  $\sigma_{in}$  和  $\sigma'_{in}$  后,由自由空间中高斯光束的传播规律可以定出  $Z_{in}$

$$Z_{in} = \frac{1}{z_p} \frac{\sigma_{in}^3 \sigma'_{in} \pi^2}{\lambda^2 + \sigma_{in}^2 \sigma'^2_{in} \pi^2} \tag{9}$$

在小偏离情况下,假设  $a = 1 + \Delta a$ , 于是由(6) 式可求得

$$d^2 \Delta a / dZ^2 + 2 \Delta a = 0 \tag{10}$$

求解方程(10) 后得到  $\Delta a$ , 于是有

$$\sigma(Z) = \sigma_c + \Delta \sigma_{in} \cos[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] + \sigma'_{in} z_p \sin[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] / \sqrt{2} \tag{11}$$

式中  $\Delta \sigma_{in}$  为介质输入端面处高斯光束光斑尺寸与  $\sigma_c$  之差。此外还可求得

$$B(Z) = \frac{B_{in} \sigma_{in}}{[\sigma_c + \Delta \sigma_{in} \cos[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma'_{in} z_p \sin[\sqrt{2}(Z - Z_{in})]} \tag{12a}$$

$$\alpha(Z) = c_1 Z + \frac{\sqrt{2}}{2\sigma_c} \left[ \Delta \sigma_{in} \sin[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] - \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma'_{in} z_p \cos[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] \right] - \frac{5\sqrt{2}}{16\sigma_c^2} \{ (\Delta \sigma_{in}^2 - \sigma'^2_{in} z_p^2 / 2) (\sin[2\sqrt{2}(Z - Z_{in})]) - \sqrt{2} \Delta \sigma_{in} \sigma'_{in} z_p \cos[2\sqrt{2}(Z - Z_{in})] \} + c_2 \tag{12b}$$

$$\beta(Z) = \frac{k_0}{2} \frac{\sqrt{2} - \Delta \sigma_{in} / z_p \sin[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma'_{in} \cos[\sqrt{2}(Z - Z_{in})]}{\sigma_c + \Delta \sigma_{in} \cos[\sqrt{2}(Z - Z_{in})] + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma'_{in} z_p \sin[\sqrt{2}(Z - Z_{in})]} \tag{12c}$$

式中,

$$c_1 = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{B_{in}^2 \sigma_{in}^2}{I_t \sigma_c^2} \right] - 1 - \frac{5}{4\sigma_c^2} (\sigma'^2_{in} z_p^2 + \Delta \sigma_{in}^2) \tag{13a}$$

$$c_2 = \arctan \left[ \frac{z_p Z_{in} (\lambda + \sigma_{in}^2 \sigma'^2_{in} \pi^2 / \lambda)}{\pi \sigma_{in}^2} \right] - c_1 Z_{in} + \frac{\sigma'_{in} z_p}{2\sigma_c} - \frac{5 \Delta \sigma_{in} \sigma'_{in} z_p}{8\sigma_c^2} \tag{13b}$$

从上边的表达式中可以分析到,当入射参量略为偏离孤子条件时,在 LSNM 中传播的高斯光束的波阵面和光束尺寸就会随距离而发生周期性变化,变化的周期为  $z_T = \sqrt{2} \pi z_p$ 。在小偏离的情况下,该周期只与介质参量有关。光束的尺寸随传播距离在最大和最小值间周期性地扩展和缩小的特征,被称为呼吸模式。图 1 为呼吸模式的示意图,由于它具有旋转对称性,所以只给出了其剖面的一半。虚线表示归一化光束尺寸,实线表示波阵面。作图时使用的  $\Delta a_{in} = 0.05$ ,为简便起见已假设  $\sigma'_{in} = 0$ 。

### 4 一般情况讨论

虽然无法对一般情况求得解析解,但仍然可以对 LSNM 中的高斯光束的最重要参量进行

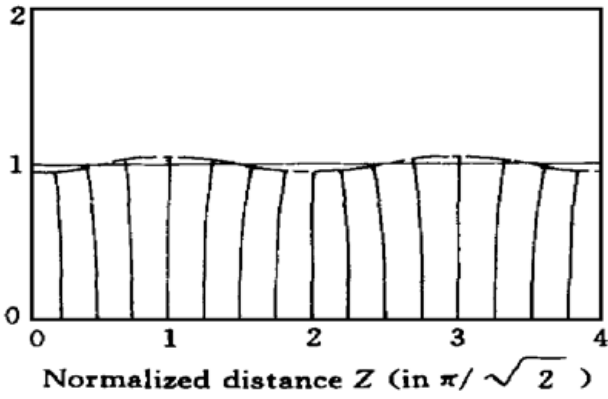


图 1 呼吸模式示意图

实线为波前, 虚线为归一化光束尺寸

Fig. 1 Sketch of a breath mode

Solid curves represent wave front, dashed line

represents normalized beam size.  $\Delta\sigma_m = 0.05, \sigma'_{in} = 0$

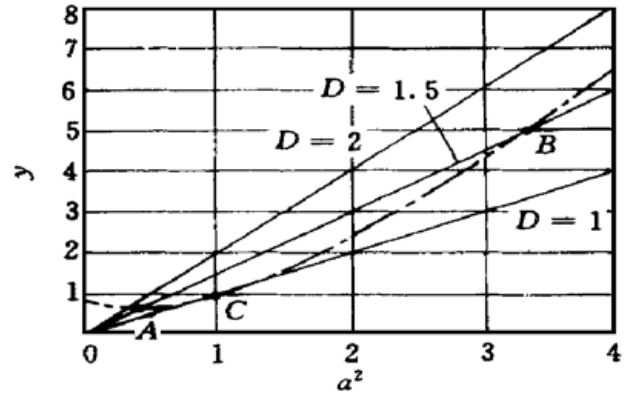


图 2 不同参量情况下的  $y_1$  和  $y_2$  的变化曲线

实线:  $y_1 = Da^2$ , 点划线:  $y_2 = a^2 \ln a^2 + 1$

Fig. 2 Curves of  $y_1$  and  $y_2$  for different  $D$

Solid line:  $y_1 = Da^2$ ,

dash-dotted curves:  $y_2 = a^2 \ln a^2 + 1$

分析。对(6)式进行积分后可得

$$(da^2/dZ)^2 = 4(Da^2 - a^2 \ln a^2 - 1) \tag{14}$$

其中积分常数  $D$  可由边界条件确定。即

$$D = 1/a'^2_{in} + \ln a'^2_{in} + a'^2_{in} \tag{15}$$

式中  $a'_{in}$  表示在 LSNM 输入界面处的  $da/dz$ 。 $da^2/dZ$  是光束横截面积随归一化传播距离的变化。

作为一种简化讨论,不妨假设入射高斯光束的束腰与介质输入界面重合,因而  $a'_{in} = 0$  且  $a_{in}$  可直接用入射高斯光束腰斑尺寸  $a_0$  来代替。在这种情况下,是否还有一个或者几个不同于  $a_0$  的  $a$  使(14)式的右端依然为零呢?为此,我们不妨采用作图的方法来进行分析。图 2 画出了  $D$  取不同值时的直线组  $y_1 = Da^2$ (实线)以及曲线  $y_2 = (a^2 \ln a^2 + 1)$ (点划线)。

利用简单的数学知识可以确定,  $D$  的最小值是 1, 此时对应的  $a$  等于 1。可以证明, 在  $D = 1$  时,  $y_1$  和  $y_2$  均通过坐标(1, 1)的  $C$  点, 且在  $C$  点处  $y_2$  的斜率与  $y_1$  的斜率相同, 即  $y_1$  和  $y_2$  相切于  $C$  点。这在物理上表示: 满足孤子条件的入射高斯光束在 LSNM 中光斑尺寸不变, 因而  $y_1$  和  $y_2$  只有一个共同点(即切点)。

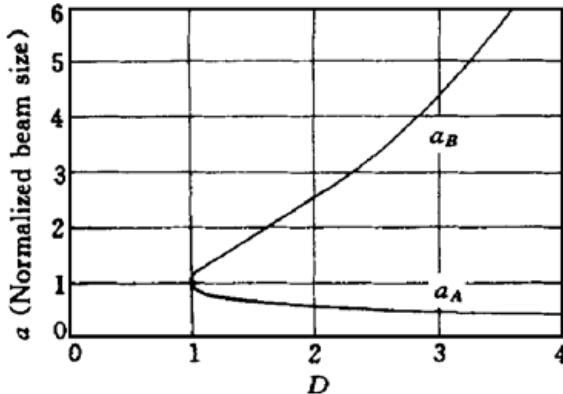


图 3  $a_A$  和  $a_B$  随参量  $D$  的变化曲线

Fig. 3 Dependence of  $a_A$  and  $a_B$  on  $D$

对于  $D > 1$  的情况  $y_1$  将变陡, 考虑到在 0 到 1 之间  $y_1$  的最小值是 0,  $y_2$  的最小值是  $(1 - 1/e)$ , 因而  $y_1$  和  $y_2$  总有一个(唯一的)交点  $A$ (对应的光束尺寸为  $a_A < 1$ )。在  $a > a_A$  之后的一段区间内满足  $y_1 > y_2$ 。由于总可以找到一个足够大的  $a$ , 使得  $\ln a^2$  大于定值  $D$ , 因而即使不考虑  $y_2$  中的 1, 也可以保证  $y_1 < y_2$ , 可见应该存在另一个唯一的交点  $B$ (对应的光束尺寸为  $a_B > 1$ ), 使得(14)式右端为零。在  $a > a_B$  之后,  $y_1$  一直小于  $y_2$ 。于是可以确定只有当  $a$  处于  $a_A$  与  $a_B$  之间时,  $y_1 \geq y_2$ , (14)式在物理上才有意义。

综上所述, 我们知道对于以束腰入射的高斯光束, 它在 LSNM 中传播时, 其归一化光束尺寸将在  $a_A$  与  $a_B$  之间作周期变化; 当呼吸模式的归一化光束尺寸等于  $a_A$  或  $a_B$  时, 相应的波阵面为平面。对于  $\sigma'_{in}$  不等于零的情况亦可作类似分析, 只不过此时常量  $D$  比束腰入射时有所增加而已。图 3 画出了呼吸模式的最小和最大光束尺寸( $a_A$  和  $a_B$ ) 随参量  $D$  变化的曲线。

最后还要说明一点的是, 对于以束腰入射的高斯光束, 如果在输入界面上的归一化光束尺寸小于(或大于) 1, 那么它在 LSNM 中形成的呼吸模式的光束尺寸不会小于(或大于) 入射腰斑尺寸。

利用这种分析, 不必通过数值方法, 同样可以方便地讨论在 LSNM 中椭圆截面的高斯光束准周期的空间孤子的呼吸模式以及部分非相干空间孤子的动态演化行为。

### 参 考 文 献

- 1 Y. R. Shen. The principles of Nonlinear Optics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984. Chap. 17
- 2 Wang Zhongyang, Zhang Zhengquan, Xuzhizhan. Propagation of optical pulses in time-quadratic index media. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(7): 937~ 940 (in Chinese)
- 3 Zhou Guosheng, Wang Haibin, Li Zhonghao *et al.*. Propagation of spatial cylindrical symmetric optical pulse in a bulk abnormal dispersive Kerr medium. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(7): 923~ 929 (in Chinese)
- 4 Li Dayi, Tang Yonglin, Han Song *et al.*. Analytical description of chirped pulses propagated inside temporal guiding media. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1998, **18**(12): 1629~ 1633 (in Chinese)
- 5 J. S. Aitchison, A. M. Weiner, Y. Silberberg *et al.*. Observation of spatial optical solitons in a nonlinear glass waveguide. *Opt. Lett.*, 1990, **15**(9): 471~ 473
- 6 A. W. Snyder, D. J. Mitchell, L. Poladian *et al.*. Self-induced optical fibers: spatial solitary waves. *Opt. Lett.*, 1991, **16**(1): 21~ 23
- 7 A. W. Snyder, J. D. Mitchell. Mighty morphing spatial solitons and bullets. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(1): 16~ 18
- 8 V. Tikhonenko. Observation of mighty morphing spatial solitons. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(8): 594~ 596
- 9 D. N. Christodoulides, T. H. Coskun, R. I. Joseph. Incoherent spatial solitons in saturable nonlinear media. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(14): 1080~ 1082
- 10 D. N. Christodoulides, T. H. Coskun, M. Mitchell *et al.*. Multimode incoherent spatial solitons in logarithmically saturable nonlinear media. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**(11): 2310~ 2313
- 11 Tang Yonglin, Li Dayi, Chen Jianguo *et al.*. Gaussian-type breath modes of spatial soliton formed in logarithmically saturable nonlinear media. *Acta Physica Sinica* (物理学报), 1998, **48**(7): 1248~ 1253 (in Chinese)

## Impacts of Logarithmically Saturable Nonlinear Media on Gaussian Beams

Li Dayi Tang Yonlin Chen Jianguo Kang Jun Zhang Kejun  
(*Optoelectronics Department, Sichuan University, Chengdu 610064*)

**Abstract** Coupled equations, governing variations of defining parameters of Gaussian beam propagating in logarithmically saturable nonlinear media, have been deduced from nonlinear propagational equations. Analytical solutions for coupled equations have been derived for cases where the incident Gaussian beams deviate slightly from the spatial soliton. General discussions have been made on the main characteristics of the Gaussian type breath mode formed in the nonlinear media.

**Key words** logarithmically saturable nonlinear media, spatial solitons, breath mode