

# 复费涅耳数的物理意义及其应用\*

王绍民 江晓清 林 强  
(浙江大学物理系 杭州 310028)

**提要** 通过对高斯光束经光阑衍射后轴上点光强分布规律的分析,详细讨论了复费涅耳数的物理意义及其应用,指出采用位相片,可将远场轴上光强提高为原高斯光束的几倍以上,而且中央光斑也比高斯光束小,并给出在激光准直中应用的例子。

**关键词** 复费涅耳数,衍射,光阑,位相片

## 1 引 言

光阑衍射在光学系统中是普遍存在的,对于均匀球面波,光阑衍射特性通常可用实费涅耳数  $N$  来作定性或半定量的分析,如根据费涅耳数大小,可方便地将含光阑光学系统的衍射分成(1)  $N \gg 1$ ,衍射效应几乎可忽略,可用几何光学方法来处理;(2)  $N \approx 1$ ,属于费涅耳衍射;(3)  $N \ll 1$ ,属于夫琅和费衍射等,并且费涅耳数也适用于复元件系统<sup>[1]</sup>和一般的失调光学系统<sup>[2]</sup>。然而,在实际的光学系统中,高斯光束是最主要的光源,光阑对高斯光束的衍射,范滇元<sup>[1]</sup>提出需用复费涅耳数来描述。那么,复费涅耳数的物理意义是什么?文献[1~3]只简要地将复费涅耳数的虚部解释为非均匀性对衍射的影响,因此,对复费涅耳数的物理意义作进一步的讨论是有必要的,有助于加深对高斯光束被光阑衍射本质的理解。本文通过对高斯光束经光阑衍射轴上点光强的分析,阐明了复费涅耳数的物理意义及其应用,指出可利用简单的位相片将远场轴上点光强提高为原高斯光束的几倍,而且中央光斑尺寸也可明显减少,这在激光准直等领域具有实际应用的价值。

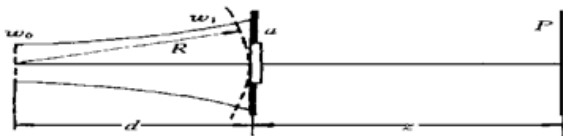


图 1 高斯光束通过硬边或位相光阑衍射装置示意图

Fig. 1 Schematic layout of a Gaussian beam diffracted by a hard or phase aperture

## 2 复费涅耳数物理意义

当一束发散球面波入射到硬边光阑或位相光阑(图 1)时,费涅耳数定义为<sup>[1,2]</sup>

$$N = \frac{a^2}{\lambda} \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{z} \right] \quad (1)$$

式中  $a$  和  $R$  分别为光阑的半径和入射波波阵面在光阑处的曲率半径。费涅耳数定义式(1)表明  $N$  的实质

\* 浙江省自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1998-09-22; 收到修改稿日期: 1998-11-19

是衍射场中心和边缘发出的两列子波波阵面差  $\lambda/2$  的倍数。

对于高斯光束入射, 费涅耳数要用复数来表示<sup>[1]</sup>, 复费涅耳数定义为

$$N_f = \frac{a^2}{\lambda} \left[ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{z} \right] = N_r - iN_i \quad (2)$$

$N_i$  和  $N_r$  分别是复费涅耳数的虚部和实部, 它们分别为

$$N_i = \frac{a^2}{\pi w_1^2} \quad N_r = \frac{a^2}{\lambda} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{z} \right] = N_{r1} + N_{r2} \quad N_{r1} = \frac{a^2}{R_1 \lambda} \quad N_{r2} = \frac{a^2}{z \lambda} \quad (3)$$

其中  $q_1$  为复曲率半径,  $R_1$  和  $w_1$  分别为入射到光阑上的波阵面的曲率半径和光束半径。可见, 复费涅耳数的实部  $N_r$  物理意义同实费涅耳数相同。

为了便于讨论复费涅耳数的物理意义, 先让我们导出高斯光束通过光阑衍射后轴上点的光强公式。设入射到光阑的基模高斯光束为

$$u(d, \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-ikd + i\Phi)}{w_1} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2q_1}\right] \quad (4)$$

$\Phi = \tan^{-1}(d/z_r)$  为轴上相移,  $z_r$  为瑞利距离,  $w_0$  为束腰半径。由基尔霍夫衍射积分公式<sup>[4]</sup>, 在旁轴近似条件下, 观察屏上的场强可求得为

$$u(z, r) = -ik \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp[-ik(d+z) + i\Phi]}{z w_1} \exp\left[-ik \frac{r^2}{2z}\right] \cdot \int_0^\infty f(\rho) \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2} \left[ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{z} \right]\right] J_0\left[\frac{k\rho r}{z}\right] \rho d\rho \quad (5)$$

其中  $f(\rho)$  为光阑函数。对于硬边光阑  $f(\rho) = \begin{cases} 1 & \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$ , 轴上点的场强可方便求得, 并用复费涅耳数表示为

$$u(z, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_{r2}}{w_1} \exp[-ik(d+z) + i\Phi] \frac{\exp(i\theta)}{\sqrt{N_r^2 + N_i^2}} [1 - \exp(-i\pi N_r) \exp(-\pi N_i)] \quad (6)$$

式中

$$\theta = \tan^{-1}(N_i/N_r) \quad (7)$$

为复费涅耳数的辐角。我们知道, 高斯光束自由传输到  $z$  处的场强为

$$u_c(z, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_2} \exp[-ik(d+z) + i\Phi_2] \quad (8)$$

其中

$$\Phi_2 = \tan^{-1}\left[\frac{d+z}{z_r}\right] \quad w_2 = w_0 \left[1 + \frac{(d+z)^2}{z_r^2}\right]^{1/2} \quad (9)$$

根据(2), (3)和(9)式, 可以证明

$$\Phi + \theta = \Phi_2 \quad w_1 \frac{\sqrt{N_r^2 + N_i^2}}{N_{r2}} = w_2 \quad (10)$$

所以高斯光束经光阑衍射后轴上点场强是

$$u(z, 0) = u_c(z, 0) [1 - \exp(-i\pi N_r) \exp(-\pi N_i)] \quad (11)$$

为便于同高斯光束比较, 写成相对高斯光束自由传输到该处时轴上点光强的相对光强分布

$$I_r(z, 0) = \frac{I(z, 0)}{I_c(z, 0)} = [1 - 2\exp(-\pi N_i) \cos(\pi N_r) + \exp(-2\pi N_i)] \quad (12)$$

这就是用复费涅耳数表示的轴上点相对光强分布公式。

从式(12) 可看出, 当  $N_r$  为奇数时, 轴上点相对光强为极大值, 而为偶数时为极小值, 复费涅耳数实部确定了相对光强的极值位置。根据边界波衍射理论<sup>[4]</sup>, 可认为这是边界波和直射波在轴上点干涉的结果。因此,  $N_r$  就是边界波与直射波在轴上点几何位相差的  $\pi$  倍数, 结合边界波  $\pi$  跃变的假说<sup>[5]</sup>, 当  $N_r$  为奇数时, 轴上点相对光强为极大值, 这一结果是很自然可得到的。需说明的是, 若是轴上点绝对强度, 由于存在焦移现象<sup>[6]</sup>, 其极值位置要移动。

对于复费涅耳数的虚部  $N_i$ , 它确定了相对光强的最大值和最小值的数值大小, 最大值和最小值的大小分别为  $[1 \pm \exp(-\pi N_i)]^2$ 。从边界波理论角度, 虚部反映了参与干涉两光束强弱, 也就是边界波与直射波在轴上的强度之比等于  $\exp(-2\pi N_i)$ 。

另外, 根据公式(10), 从辐角和模角度来说, 复费涅耳数辐角  $\theta$  就是光束从光阑传输到观察点产生的轴上相移, 而模  $|N_f|$  数值上等于  $N_{r2} \frac{w_2}{w_1}$ 。

### 3 应用举例

根据以上的分析, 要使轴上点强度为极大值, 获得较强的轴上点光强分布, 可选择光阑使复费涅耳数的实部  $N_r = 1$ , 并让它的虚部尽量小。比如希望在无穷远( $z \rightarrow \infty$ , 也就是  $N_{r2} \rightarrow 0$ ) 处的中央光强增强, 那么, 只要将光阑置于  $N_{r1} = 1$  附近, 即让无穷远处仍处在费涅耳衍射区, 便能在无穷远处获得大于高斯光束轴上点光强几倍的光强分布。例如, 当  $a^2/w_0^2 = 5.2\pi$ ,  $d = 5z_r$  时,  $N_{r1} = 1, N_i = 0.2$ , 轴上点光强是原高斯光束的 2.3 倍。

对于位相光阑  $f(\rho) = \begin{cases} \exp(-i\varphi) & \rho \leq a \\ 1 & \rho > a \end{cases}$ , 类似第二部分的推导, 可方便给出轴上点

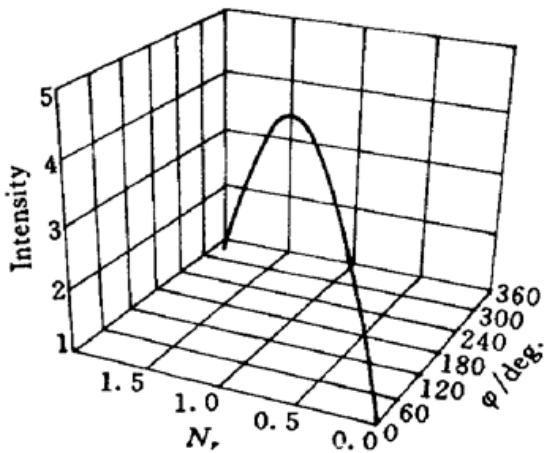


图 2 当  $N_i = 0.2$  时, 位相光阑轴上点相对光强最大值与  $N_r$  和  $\varphi$  之间的关系曲线

Fig. 2 The maximum of relative intensity on axis of a phase aperture as a function  $N_r$  and  $\varphi$  when  $N_i = 0.2$

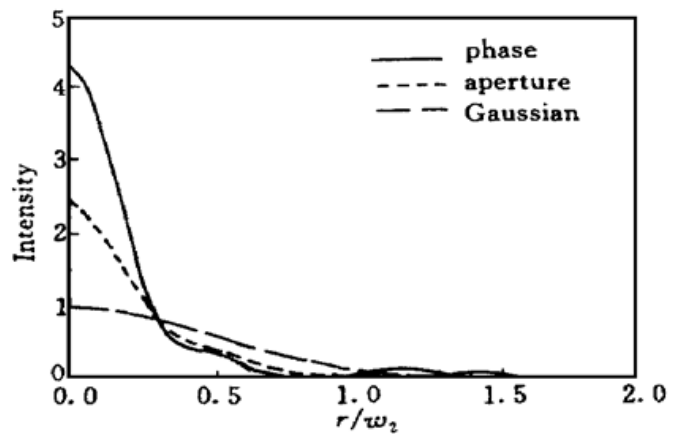


图 3 当  $N_{r1} = 1, N_i = 0.2, \varphi = \pi$  时, 在  $N_{r2} = 0.001$  处位相光阑(实线) 和硬边光阑(虚线) 衍射相对光强横向分布与高斯光束(短划线) 比较,  $w_2$  是在相同处直射高斯光束的光斑大小

Fig. 3 Comparison of the diffraction patterns produced by a phase aperture (solid line) and a hard aperture (dotted line) vs Gaussian beam (dashed line) in  $N_{r2} = 0.001$ , when  $N_{r1} = 1, N_i = 0.2, \varphi = \pi$ .  $w_2$  is the size of original Gaussian beam in the same position

相对光强公式

$$I_p(z, 0) = \{1 - 2\exp(-\pi N_i) [\cos(\pi N_r) - \cos(\varphi - \pi N_r)] + 2\exp(-2\pi N_i) [1 - \cos(\varphi)]\} \tag{13}$$

$\varphi$ 为位相台阶产生的位相延迟。位相光阑衍射轴上点相对光强不仅取决于  $N_r$  和  $N_i$ , 还与  $\varphi$  有关。当  $N_i$  值一定时, 由公式(13) 可知, 满足关系

$$N_r = \{\varphi - \sin^{-1}[\exp(-\pi N_i) \sin(\varphi)]\} / \pi \tag{14}$$

的轴上点为光强的极大值位置。图 2 给出  $N_i = 0.2$  时,  $I_{p(\max)}$ ,  $N_r$  和  $\varphi$  之间的关系曲线, 在  $N_r = 0.5 \sim 1.5$  范围内, 选择适当的位相片, 都能使  $I_p > 2$ ; 当  $N_r = 1$  和  $\varphi = \pi$  时, 光强具有最大值  $[1 + 2\exp(-\pi N_i)]^2 \approx 4.3$ , 所以位相光阑更有利于提高轴上点的强度。

图 3 是根据公式(5), 利用数值积分方法给出了  $N_{r1} = 1, N_i = 0.2, \varphi = \pi$  时, 硬边光阑和位相光阑在  $N_{r2} = 0.001$  处相对光强横向分布曲线。可见, 位相光阑衍射轴上点光强为原高斯光束的约 4.3 倍, 而且中央光斑也比高斯光束小(约为  $w_2/3$ ,  $w_2$  是在相同处直射高斯光束的光斑大小), 中央光斑的光能量占总能量的 40%。若调整位相片的位相  $\varphi$ , 中央光斑的光能量可增加, 但轴上点强度有所下降。

对 He-Ne 激光望远镜准直系统, 根据费涅耳数通过 ABCD 系统的变换关系<sup>[1,2]</sup>可知, 将一定大小位相光阑置于望远镜的目镜的后焦平面上, 则在聚焦点的外侧一段较长的范围内能获得中心光强大于高斯光束 2 倍以上的光强分布。如对于放大率为 40 倍望远镜准直系统, He-Ne 激光的  $w_0 = 0.36 \text{ mm}, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。当望远镜聚焦在 1000 m 处时, 在 1200~ 1750 m 的几百米范围内仍能获得大于高斯光束 2 倍以上的中心光强分布(图 4 中  $N_i = 0.2, \varphi = \pi$ ), 图中同时给出了在相同处直接通过望远镜准直后的高斯光束光强分布。在 1200 m, 1290 m 和 1750 m 处, 轴上点的光强分别是相应高斯光束的 2.1, 4.3 和 2.8 倍, 若以最佳位置 ( $N_r = 1, z = 1290 \text{ m}$ ) 的中央光斑(约为  $w_2/3 \approx 6 \text{ mm}$ ) 大小为基准, 中央光斑的光能量分别占总能量的 36%, 40% 和 19%, 为相应高斯光束光能量的 1.6, 2.0 和 1.8 倍, 景深较长, 不同于波带板的准直效果, 并可通过调焦得到最佳的适用范围。对于半导体激光器, 由于它的瑞利距离在零点几毫米的量级, 位相片置于望远镜的目镜前面, 就可得到  $N_{r1} = 1$ , 它的准直更方便。

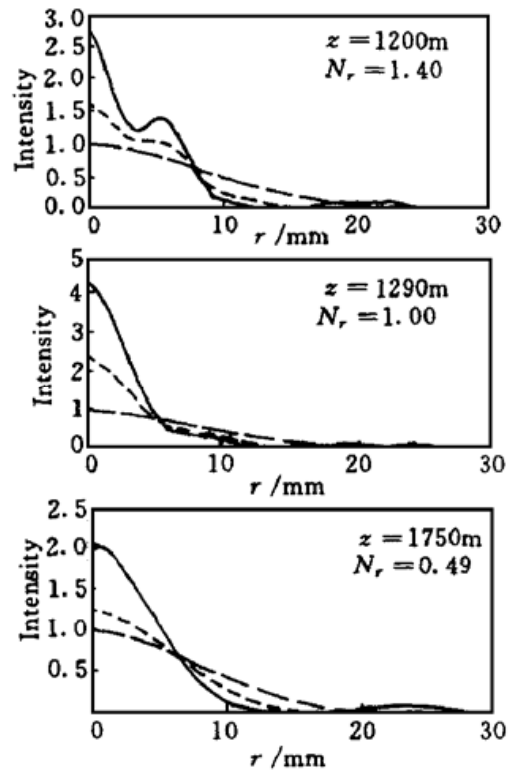


图 4 在 1200 m, 1290 m 和 1750 m 处位相光阑(实线)和硬边光阑(虚线)衍射相对光强横向分布与在相同处经望远镜准直的高斯光束(短划线)比较

Fig. 4 Comparison of the diffraction patterns produced by a phase aperture (solid line) and a hard aperture (dotted line) vs collimating Gaussian beam (dashed line) at the same position, located at 1200 m, 1290 m and 1750 m

### 4 结 论

复费涅耳数的实部的物理意义同实费涅耳数相同, 虚部反映了光束振幅分布的不均匀性

对轴上点衍射强度大小的影响。从边界波衍射角度来说,其实部反映了边界波与直射波在轴上点光程差的  $\lambda/2$  倍数,而虚部则是反映边界波与直射波在轴上点强弱之比,其辐角是光束从光阑传输到观察点产生的轴上相移,而模数值上等于  $N_{r2} \frac{w_2}{w_1}$ 。采用费涅耳数概念定性或半定量讨论光阑衍射是很方便的,物理意义清楚。本文提出利用简单的位相片,可将远场的光强度提高到原高斯光束的几倍以上,而且中央光斑也比原高斯光束小,此结果在激光准直、制导等领域有着实际应用的前景。

### 参 考 文 献

- 1 Fan Dianyuan. The Fresnel number in terms of ray matrix elements. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(3): 319~ 325 (in Chinese)
- 2 Wang Shaomin, E. Bernabeu, J. Alda. Unified and generalized Fresnel numbers. *Opt. & Quantum Electron.*, 1992, **24**(12): 1351~ 1358
- 3 Wang Shaomin, Zhao Daomu. Principles of Matrix Optics. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1994. 26~ 29 (in Chinese)
- 4 M. Born, E. Worf. Principles of Optics. New York: Pergamon Press Inc.. 1980, § 8.9
- 5 Wang Shaomin. On natures of diffraction. *Appl. Laser* (应用激光), 1994, **14**(3): 99~ 101 (in Chinese) and *Optik*, 1995, **100**(3): 107~ 108
- 6 Yajun Li, Emil Wolf. Focal shift in focused truncated Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1982, **42**(2): 151 ~ 156

## Physical Meaning and Applications of Complex Fresnel Number

Wang Shaomin Jiang Xiaoqing Lin Qiang

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028)

**Abstract** The physical meaning of complex Fresnel number is discussed in detail based on the axial intensity of Gaussian beam diffracted by a hard aperture. The far-field intensity on axis can be enhanced by several times of the original Gaussian beam using a suitable phase aperture. In the meantime, the central spot is smaller than the original Gaussian beam. An application example of laser collimation is given.

**Key words** complex Fresnel number, diffraction, aperture, phase plate