

光学小波变换中尺度因子的极限

朱建平

(山西大学电子信息技术系 太原 030006)

提要 分析了光学小波变换中实际光学系统对尺度因子选取的限制,确定了小波函数对应光学系统尺度因子的最小值,分别给出几种小波函数在 $4F$ 系统中尺度因子的最小值,为小波变换应用于实际光信息处理系统提供了有意义的参考数据。

关键词 光学小波变换, 尺度因子, 光信息处理

1 引 言

小波变换作为一种新的数学工具,被广泛运用于光学领域^[1~3],逐渐开始形成新的光学理论,即小波光学^[3]。该方法突破了传统的傅里叶光学理论只能处理平稳信号和非局域信息的限制,在对非平稳和局域信号的处理中,小波变换方法具有数学结构简洁、物理图像清晰、实验操作易行、便于数值模拟等优点,近年来在光学信息处理领域发展迅猛。小波变换主要是通过改变小波的尺度因子,对信号(或其波谱)进行多尺度处理^[4],抽取的信号反映了不同尺度下的特征。应当考虑到在进行光信息处理中,我们采用的光学系统是衍射受限的,由此,小波变换中尺度因子的选取必然受到衍射受限光学系统的影响,而不是任意的。

本文通过对光学信息处理系统频域的小波变换进行分析,以 $4F$ 系统为例讨论了衍射受限光学系统对尺度因子选取的限制,确定了可选尺度因子的最小极限的一般表达式,并给出了几种小波函数在 $4F$ 光学处理系统中的最小值。

2 小波变换与光学信息处理系统

这里,一维小波函数定义为

$$h_{ab}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left[\frac{x-b}{a}\right] \quad (1)$$

其中,尺度因子 $a > 0$, 平移因子 $b > 0$ 。空域中,一维像 $s(x)$ 的小波变换为

$$w_s(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int s(x) h\left[\frac{x-b}{a}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{a}} s(b) \odot h(b/a) \quad (2)$$

在频域中,考虑相干光学系统的相干传递函数,对应其光场分布写为

$$W_s(a, p) = \sqrt{a} S(p) H(ap) P(\mathcal{N}p) \quad (3)$$

其中, $S(p)$ 和 $H(ap)$ 分别是 $s(x)$ 和 $h(x/a)$ 的傅里叶变换, $P(\mathcal{N}p)$ 是系统的相干传递函数, f 是 $4F$ 系统的透镜焦距。

频域中, 小波变换写为

$$w_s(a, b) = \sqrt{a} \int S(p) H(ap) P(\mathcal{N}p) \exp(-j2\pi bp) dp \tag{4}$$

图 1 为 $4F$ 处理系统。

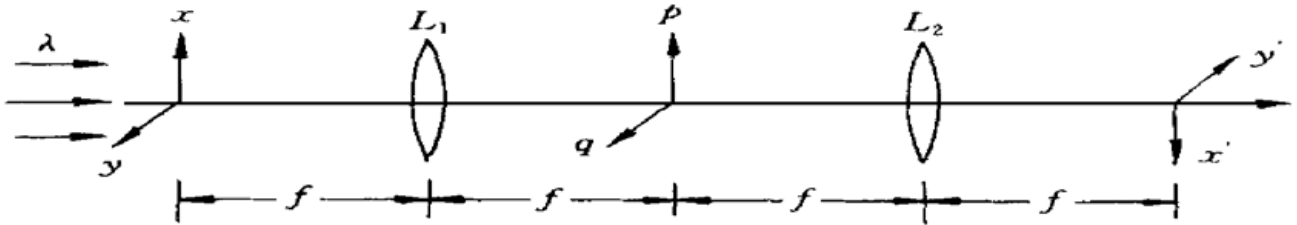


图 1 实现小波变换的 $4F$ 光学处理系统

Fig. 1 Optical processor to realize the wavelet transformation

若考虑系统出射光瞳在 x 方向上的宽度为 l , 则沿 x 方向上的截止频率为^[5]

$$p_0 = \frac{l}{2\mathcal{N}} \tag{5}$$

我们知道, 随着 a 的取值减小, $h_{ab}(x)$ 的频谱向高频方向移动, 但是衍射受限光学系统要求 $|p| \leq p_0$, 同时, 由于小波空间域与频率域的局部性, 要求 $h_{ab}(x)$ 的频谱 $H(ap)$ 在有限区间外恒等于 0, 或很快趋于 0, 于是取 $|ap_0|$ 为

$$|ap_0| = B \tag{6}$$

其中 B 为常数, 对于不同的小波函数, B 的取值不同。考虑到小波函数和其频谱函数的特征, B 的大小取紧靠频域中心两侧频谱模函数两最大值点的间距。

可见 a 的最小取值为

$$a_{\min} = \frac{B}{p_0} = \frac{2lfB}{l} \tag{7}$$

下节列举三个不同的小波函数, 由上述结论给出相应的 a_{\min} 。

3 几种小波函数的最小尺度因子 a_{\min}

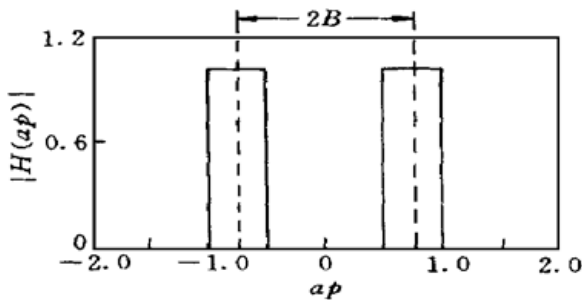


图 2 Shannon 小波函数空间频谱(模函数)图
Fig. 2 Spatial-frequency spectrum of Shannon wavelet function (modular function)

下面采用 $4F$ 系统的参量为 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $f = 0.5 \text{ m}$, $l = 20 \text{ mm}$ 进行计算。

3.1 Shannon 小波母函数

$$h(x) = \frac{\sin 2\pi(x - 1/2) - \sin \pi(x - 1/2)}{\pi(x - 1/2)} = 2\text{sinc}2(x - 1/2) - \text{sinc}(x - 1/2)$$

频谱 $H(ap) = [\text{rect}(ap/2) - \text{rect}(ap)] \exp(-j\pi ap)$

图 2 所示为频谱函数模函数曲线。 $(ap) = \pm 3/4$ 为 $H(ap)$ 的两最大值点, 取 $B = 3/4$ 。则

$$a_{\min} = B/p_0 = 3\mathcal{N}f/2l \approx 0.024 \text{ mm}$$

3.2 Harr 小波母函数

$$h(x) = \text{rect}[2(x - 1/4)] - \text{rect}[2(x - 3/4)]$$

频谱
$$H(ap) = \left| \sin^2 \frac{\pi(ap)}{2} \right| \frac{\pi(ap)}{2} j \exp[-j\pi(ap)]$$

图 3 所示为频谱函数模函数曲线。(ap) = ± 0.743 为两最大值点, 取 B = 0.743。则

$$a_{\min} = B/p_0 = 1.486\lambda/l \approx 0.024 \text{ mm}$$

3.3 Mexican-hat 小波母函数

$$h(x) = (1 - x^2) \exp(-x^2/2)$$

频谱
$$H(ap) = 4\pi^2 \sqrt{2\pi} (ap)^2 \exp[-2\pi^2 (ap)^2]$$

图 4 所示为频谱曲线(注: Mexican-hat 频谱函数是正的实函数)。(ap) = ± $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ 为两最大值点, 取 B = $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ 。则

$$a_{\min} = B/p_0 = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\pi l} \approx 0.007 \text{ mm}$$

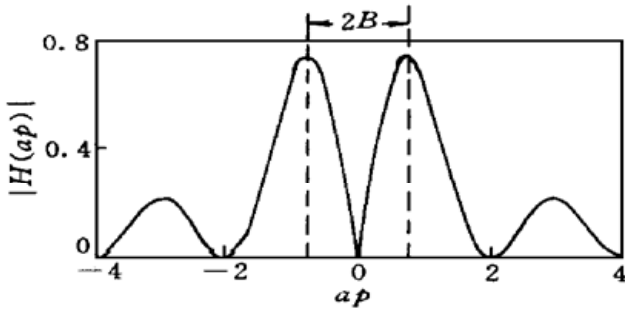


图 3 Harr 小波函数空间频谱(模函数)图
Fig. 3 Spatial-frequency spectrum of Harr wavelet function (modular function)

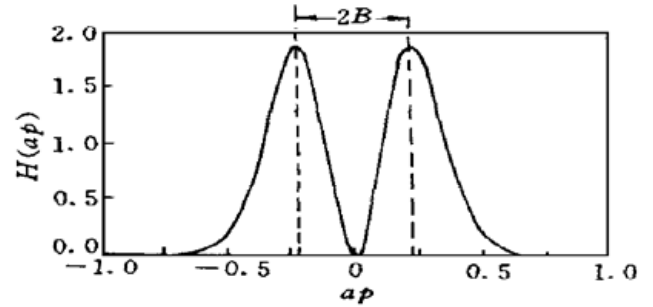


图 4 Mexican-hat 小波函数空间频谱图
Fig. 4 Spatial-frequency spectrum of Mexican-hat wavelet function

4 结 论

从上述讨论和列举的三个小波函数说明, 在实现光学小波变换中, 尺度因子的最小值选取受衍射受限光学系统的截止频率限制, 并且选用不同的小波函数尺度因子的最小取值是不同的, 根据上述讨论所采用的光学 4F 系统参量数值, 可取值尺度的最小取值数量级为 $10^{-3} \sim 10^{-2} \text{ mm}$ 。由此可见, 确定尺度因子的极限值对于小波变换在实际光信息处理系统中的应用有重要意义。

参 考 文 献

- 1 Kang Hui, Xu Jian, Zhan Yuanling *et al.*. Optical wavelet transform with photorefractive holographic matched filtering. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1996, **A23**(8): 741~ 744 (in Chinese)
- 2 Yan Xiaona, Wang Ning, Yin Yaozu *et al.*. Negative binary coding wavelet transform. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(4): 461~ 464 (in Chinese)
- 3 Ma Jing, Tan Liying, Ran Qiwen. The elementary theory of optical wavelet filtering. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1999, **A26**(4): 343~ 346 (in Chinese)
- 4 S. G. Mallat. A theory for multifrequency signal decompositions: the wavelet representation. *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, 1989, **7**: 674
- 5 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics. Beijing: Science Press, 1968. 128 (in Chinese)

Limitation of the Scale Factor in the Optical-wavelet Transformation

Zhu Jianping

(Department of Electronics & Information Science, Shanxi University, Taiyuan 030006)

Abstract In this paper, the limitation for choosing the scale factor of an optical system in an optical-wavelet transformation is analysed; a minimal scale factor of an optical system is determined in corresponding to an optical-wavelet transformation; and the minima of scale factor in a $4F$ optical processor are calculated for the transformation with a few of specified wavelet functions, some significant data are provided for the application for wavelet transformation in real optical information processor.

Key words optical wavelet transform, scale factor, optical information process

2001 年第九届全国光电技术及系统学术会议征文通知

本次会议由中国光学学会光电专业委员会主办,中国计量学院和浙江大学承办。

一、征文内容

1. 新型光源: 新型激光器及可调谐激光器, LD, LD 抽运激光器, 光纤激光器; 紫外、可见、红外光源; 同步辐射加速器; 太阳能利用; 绿色照明。2. 光电接收、放大; 新型光电子器件及光电子技术; CCD 器件及其应用; 数码相机, DVD 及数码电视及其应用; 红外及微光夜视系统、红外热电视系统。3. 有源、无源集成光电子学器件; 光纤器件、光纤光栅及波分复用器件及技术; 光纤通信系统中的光电子器件、技术和系统。4. 微小光学与光学微加工技术, 二元光学及其应用。5. 新型光电子材料, 光子晶体; 光学记录、储存和再现技术。6. 光纤传感技术、光纤陀螺、分布光纤传感网络 and 智能结构及其应用。7. 数字、模拟和混合光计算和光学神经网络; 模式识别、图像处理 and 智能机器视觉系统。8. 光电子技术在光子生物、光子医学领域中的应用; 超高分辨率的显微光电成像技术。9. 全息光学信息处理及应用。10. 光电检测与控制技术; 光电显示。

二、征文要求

1. 论文详细摘要(1000字), 用 A4 纸打印。内容包括论文题目、作者姓名、工作单位、通讯地址、邮编、电话、传真、e-mail 地址、摘要。2. 已在国内外正式出版物上发表过的论文不予录用, 请勿一稿多投。3. 征文截稿日期: 2000 年 12 月 10 日。

三、征集参展

会议期间将举办产品介绍, 信息发布和产品展销。欢迎公司、企业、研究所和大学等有关单位参加。具体事宜与秘书组联系。

四、秘书组联系人

张在宣、陈永良。杭州市学院路 111 号中国计量学院光电子技术研究所。邮编: 310034, 电话: 0571-8075024-8301, 13705815652, 传真: 0571-8857560, e-mail: zhangzx@public.hz.zi.cn

第九届全国光电技术及系统学术会议秘书组

2000 年 9 月 8 日