

单模激光的噪声关联时间效应

王忠龙 石亚非
(三峡大学物理系 宜昌 443000)

曹 力 吴大进
(华中科技大学物理系 武汉 430074)

提要 利用线性近似方法推导了由关联噪声驱动的单模激光增益模型的光强关联函数、关联时间和功率谱, 分析讨论了噪声互关联时间 τ_m 和自关联时间 τ_s 对激光上述性质的影响, 发现在关联噪声驱动的单模激光系统中, τ_m 和 τ_s 对激光统计性质起着完全不同的作用, 并导致一些新奇的现象。
关键词 单模激光, 噪声关联时间, 光强关联函数, 功率谱

1 引 言

单模激光模型通常包括两类噪声, 即乘法抽运噪声和加法量子噪声。众所周知, 抽运噪声的自关联形式有“白”的(自关联时间 $\tau_s \rightarrow 0$) 和“色”的(有限的 τ_s) 两种, 而量子噪声一般作为白噪声来处理, 两噪声之间还存在着互关联(互关联时间为 τ_m)^[1-3]。这样, 单模激光模型的噪声关联形式有两种: 一种是两白噪声之间存在 e 指数形式关联($\tau_s \rightarrow 0$ 和有限的 τ_m), 另一种是色抽运噪声和量子噪声之间存在 δ 形式关联($\tau_m \rightarrow 0$ 和有限的 τ_s)。本文利用线性近似方法^[4], 计算对应上述两种噪声关联形式的单模激光增益模型的光强关联函数、关联时间和功率谱, 分析讨论 τ_m 和 τ_s 对这些性质的影响。我们发现, 噪声互关联时间(即指有限的 τ_m 且 $\tau_s \rightarrow 0$) 和噪声自关联时间(即指有限的 τ_s 且 $\tau_m \rightarrow 0$) 对激光统计性质起着完全不同的作用, 并分别导致激光出现完全不同的奇特现象。至于线性近似方法的可靠性问题, 在文献[4]中已进行了讨论。

2 理论推导

单模激光增益模型的光强方程由下式给出^[3]

$$\frac{dI}{dt} = -2kI + \frac{2\Gamma I}{1 + \beta I} + D + \frac{2I}{1 + \beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I} q(t) \quad (1)$$

(1) 考虑互关联时间 τ_m , 则噪声 $\xi(t)$ 和 $q(t)$ 满足

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle q(t) \rangle = 0, \quad \langle q(t) q(t') \rangle = D\delta(t - t') \quad (2a)$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = Q\delta(t - t') \quad (2b)$$

$$\langle \xi(t) q(t') \rangle = \langle \xi(t') q(t) \rangle = \rho \sqrt{QD} \exp(-|t - t'|/\tau_m)/(2\tau_m) \quad (-1 \leq \rho \leq 1) \quad (2c)$$

方程(1)、(2)中, ρ 为衡量噪声关联程度的参数, O 和 D 分别为乘法和加法噪声强度; τ_m 为噪声间的互关联时间; $\beta = A/\Gamma$, A 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数, k 为损失系数。

将式(1) 在稳态 $I_0 = (\Gamma - k)/(\beta k)$ 附近线性化, 并设 $I = I_0 + \delta(t)$, 则

$$d\delta(t)/dt = -\gamma\delta(t) + D + [2I_0/(1 + \beta I_0)]\xi(t) + 2\sqrt{I_0}q(t) \quad (3)$$

式中 $\gamma = 2k(\Gamma - k)/\Gamma$ 。

下面我们仅讨论 $\gamma \neq \tau_m^{-1}$ 的情形。

解出方程(3), 并根据归一化光强关联函数的定义式

$$\lambda(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{\langle I(t+t')I(t') \rangle - \langle I(t') \rangle^2}{\langle I(t') \rangle^2} \quad (4)$$

可得增益模型的光强关联函数为

$$\lambda(t) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[\frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D - \frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{(1 + \beta I_0)(\gamma^2\tau_m^2 - 1)} \right] \exp(-\gamma|t|) + \frac{4\rho\tau_m\sqrt{QDI_0}}{I_0(1 + \beta I_0)(\gamma^2\tau_m^2 - 1)} \exp(-|t|/\tau_m) \quad (5)$$

光强相对涨落

$$\lambda(0) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[\frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D + \frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{(1 + \beta I_0)(\gamma\tau_m + 1)} \right] \quad (6)$$

归一化光强关联时间为

$$T = \int_0^\infty [\lambda(t)/\lambda(0)] dt = \frac{2}{\gamma^2 I_0 \lambda(0)} \left[\frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D + \frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{(1 + \beta I_0)} \right] \quad (7)$$

功率谱由光强关联函数的傅里叶变换得到

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \lambda(t) \exp(i\omega t) dt = \frac{4}{I_0(\omega^2 + \gamma^2)} \left[\frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D + \frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{(1 + \beta I_0)(\omega^2\tau_m^2 + 1)} \right] \quad (8)$$

(2) 考虑自关联时间 τ , 则方程(2a) 保持不变, 而方程(2b), (2c) 变为

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = Q \exp(-|t - t'|/\tau) / (2\tau) \quad (9a)$$

$$\langle \xi(t)q(t') \rangle = \langle \xi(t')q(t) \rangle = \rho\sqrt{QD}\delta(t - t') \quad (-1 \leq \rho \leq 1) \quad (9b)$$

式中 τ 为噪声 $\xi(t)$ 的自关联时间。

利用同样的方法, 可以得到增益模型的光强关联函数、关联时间和功率谱。下面也仅讨论 $\gamma \neq \tau^{-1}$ 的情形。

$$\lambda(t) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[\frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{1 + \beta I_0} + D - \frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2(\gamma^2\tau^2 - 1)} \right] \exp(-\gamma|t|) + \frac{2Q\tau}{(1 + \beta I_0)^2(\gamma^2\tau^2 - 1)} \exp(-|t|/\tau) \quad (10)$$

$$\lambda(0) = \frac{2}{\gamma I_0} \left[\frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{1 + \beta I_0} + D + \frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2(\gamma\tau + 1)} \right] \quad (11)$$

$$T = \frac{2}{\gamma^2 I_0 \lambda(0)} \left[\frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2} + D + \frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{1 + \beta I_0} \right] \quad (12)$$

$$S(\omega) = \frac{4}{I_0(\omega^2 + \gamma^2)} \left[\frac{2\rho\sqrt{QDI_0}}{1 + \beta I_0} + D + \frac{QI_0}{(1 + \beta I_0)^2(\omega^2\tau^2 + 1)} \right] \quad (13)$$

3 结论和讨论

3.1 噪声关联时间对光强关联函数的影响

3.1.1 光强关联函数的时间演化

仔细分析方程(5), 得到一个重要结论: 考虑噪声互关联时间 τ_m , 将会导致光强关联函数随时间的演化具有两种形式, 一种是随时间单调衰减; 另一种是在衰减过程中出现了负极小值。两种形式的临界方程为

$$\rho = \frac{[QI_0 + D(1 + \beta I_0)^2](\gamma^2 \tau_m^2 - 1)}{2(1 + \beta I_0) \sqrt{QDI_0}} \quad (\gamma < \tau_m^{-1}) \quad (14)$$

当方程(14)取大于号时, $\lambda(t)$ 随时间单调衰减; 取小于号时, $\lambda(t) \rightarrow t$ 曲线出现负极小值。这两种情形可用参数图 $\rho-Q$ 来说明。图 1 是根据方程(14)画出的临界曲线, 若在图中的区域 I 和 II 中各取两点, 并画出与这四点的参数对应的 $\lambda(t)$ 随时间的演化曲线, 如图 2 所示, 则可清楚看出光强关联函数随时间演化的两种不同形式。

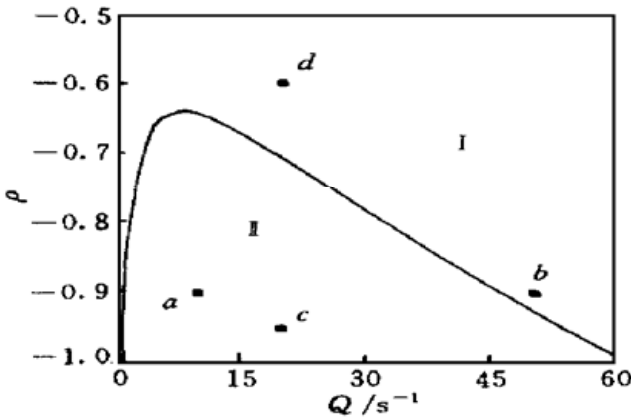


图 1 考虑 τ_m 时, 说明光强关联函数的两种时间演化形式的参数图

Fig. 1 Parameter graph illustrating two forms of the time-evolution of $\lambda(t)$ for $\tau_m \neq 0$

$\Gamma = 2000 \text{ s}^{-1}, k = 1000 \text{ s}^{-1}, \beta = 1,$
 $D = 2 \text{ s}^{-1}, \tau_m = 0.0006 \text{ s}$

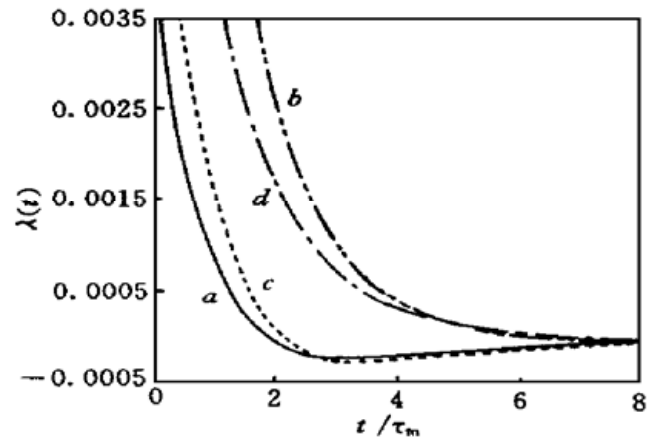


图 2 考虑 τ_m 时, 光强关联函数的时间演化曲线

Fig. 2 Time-evolution curves of $\lambda(t)$ for $\tau_m \neq 0$

a: $\rho = -0.9, Q = 10 \text{ s}^{-1}$; b: $\rho = -0.9, Q = 50 \text{ s}^{-1}$;
 c: $\rho = -0.95, Q = 20 \text{ s}^{-1}$; d: $\rho = -0.6, Q = 20 \text{ s}^{-1}$

The rest of the parameter are the same as in Fig. 1

由方程(10)同样可发现, 考虑噪声自关联时间 τ_s , 也会导致光强关联函数随时间的演化具有两种形式, 一种是随时间单调衰减; 另一种则是在衰减过程中出现正极大值。两种形式的临界方程为

$$\rho = -D(1 + \beta I_0) / (2 \sqrt{QDI_0}) \quad (15)$$

当方程(15)取大于号时, $\lambda(t)$ 随时间单调衰减; 取小于号时, $\lambda(t) \rightarrow t$ 曲线出现正极大值。利用和图 1, 2 相同的办法, 也可以由方程(15)画出参数图(如图 3 所示)和对应的光强关联函数随时间的演化曲线(如图 4 所示)。由图 4 可清楚看出光强关联函数随时间演化的两种不同形式。

上面的结论说明, 在关联噪声驱动的单模激光系统中, 噪声关联时间使光强关联函数的时间演化曲线具有两种形式, 但互关联时间 τ_m 和自关联时间 τ_s 对 $\lambda(t) \rightarrow t$ 曲线的影响却完全不同: τ_m 导致曲线出现负极小值, 而 τ_s 则导致曲线的正极大值。

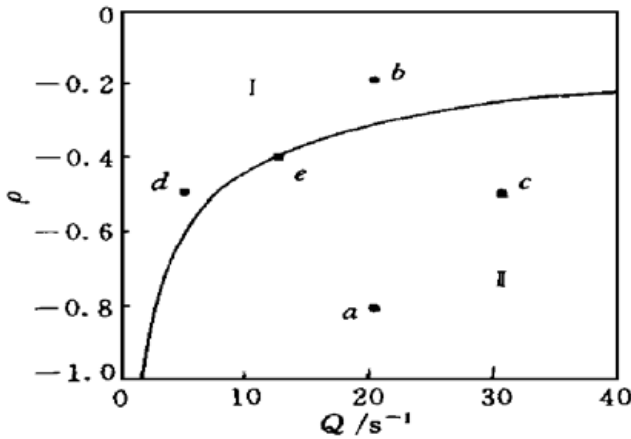


图 3 考虑 τ 时,说明光强关联函数的两种时间演化形式的参数图

$\tau = 0.0006$ s, 其他参数值同图 1

Fig. 3 Parameter graph illustrating two forms of the time-evolution of $\lambda(t)$ for $\tau \neq 0$

$\tau = 0.0006$ s, the rest of the parameter are the same as in Fig. 1

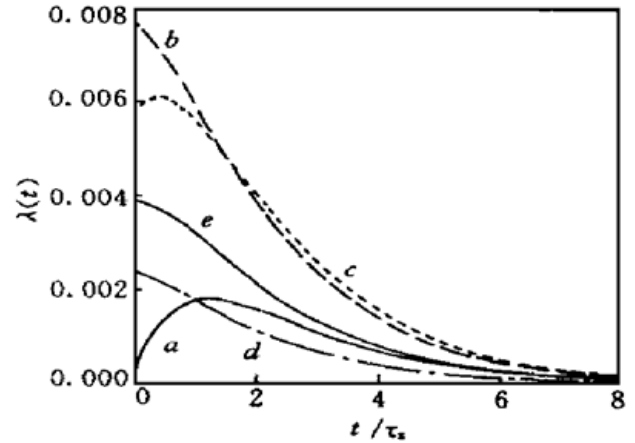


图 4 考虑 τ 时,光强关联函数的时间演化曲线

Fig. 4 Time-evolution curves of $\lambda(t)$ for $\tau \neq 0$

$a: \rho = -0.8, Q = 20 \text{ s}^{-1}; b: \rho = -0.2, Q = 20 \text{ s}^{-1};$
 $c: \rho = -0.5, Q = 30 \text{ s}^{-1}; d: \rho = -0.5, Q = 5 \text{ s}^{-1};$
 $e: \rho = -0.4, Q = 12.5 \text{ s}^{-1}$

The rest of the parameter are the same as in Fig. 3

3. 1. 2 初始平台

根据光强关联函数 $\lambda(t)$ 的解析式计算 $\lim_{t \rightarrow 0} d\lambda(t)/dt = 0$ (即初始斜率为零), 则称 $\lambda(t) \rightarrow t$ 曲线存在初始平台。由方程(5)可知, $\lim_{t \rightarrow 0} d\lambda(t)/dt = -2Q/(1 + \beta I_0)^2 - 2D/I_0 \neq 0$ 。可见, 当考虑噪声互关联时间 τ_m 时, $\lambda(t) \rightarrow t$ 曲线不会出现初始平台。

由方程(10)可知, 当满足方程(15)时, 光强关联函数的时间演化曲线会出现初始平台。(15)式表明 $\rho < 0$, 且由此式所画出的曲线即为光强关联函数随时间演化的两种形式的临界曲线(如图3)。由此我们得到: 当考虑自关联时间 τ , 且互关联为负时, 对应光强关联函数的两种时间演化形式的临界曲线上任意一点(如图3中的 e 点), 光强关联函数的时间演化曲线均会出现初始平台(如图4中的曲线 e)。

3. 2 噪声关联时间对光强关联时间的影响

由方程(7)计算 $\partial T/\partial Q = 0$ 可得

$$\left[\frac{Q I_0}{(1 + \beta I_0)^2} - D \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma \tau_m + 1} \right] = 0 \tag{16}$$

当 τ_m 取有限值时, 方程(16)变为 $Q I_0 / (1 + \beta I_0)^2 - D = 0$ 。此时, 光强关联时间 T 随抽运噪声强度 Q 的变化曲线将出现极值, 而极值是极大还是极小则取决于噪声间互关联的正负。对方程(7)求二阶导数并通过进一步分析可知, 当 $\rho < 0$ 时, $T-Q$ 曲线出现一极小值, 且 T 值比 $\rho = 0$ 时要小; 当 $\rho > 0$ 时, $T-Q$ 曲线出现一极大值, 且 T 值比 $\rho = 0$ 时要大, 如图5所示。由此得出结论: 噪声互关联时间 τ_m 将使激光的弛豫过程发生显著变化。负的噪声互关联使激光的弛豫过程变快, 且对应某个特定 Q 值(满足方程(16)), 弛豫过程被最大变快了; 而正的互关联则慢化了激光的弛豫过程, 且对应某个特定 Q 值, 弛豫过程被最大地慢化了。

由方程(12)计算 $\partial T/\partial Q = 0$ 可得

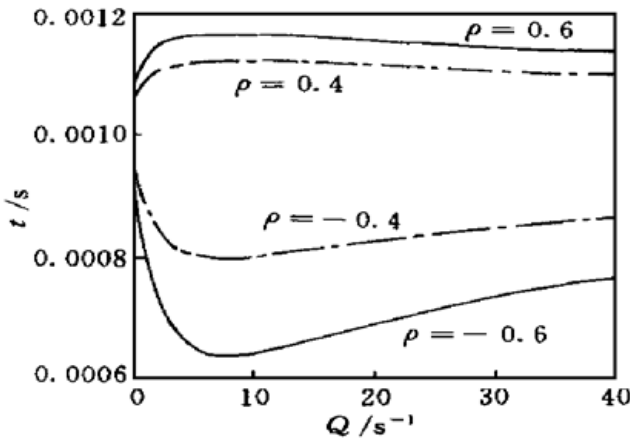


图 5 考虑 τ_m 时, 光强关联时间随抽运噪声强度的变化。其他参数值同图 1

Fig. 5 Change curves of T with Q for $\tau_m \neq 0$

The rest of the parameter are the same as in Fig. 1

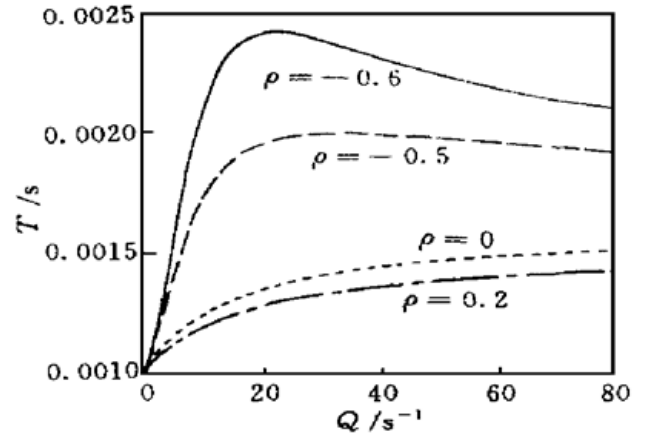


图 6 考虑 τ_s 时, 光强关联时间随抽运噪声强度的变化。其他参数值同图 3

Fig. 6 Change curves of T with Q for $\tau_s \neq 0$

The rest of the parameter are the same as in Fig. 3

$$\left[\frac{\rho \sqrt{QDI_0}}{1 + \beta I_0} + D \right] \left[1 - \frac{1}{\gamma \tau_s + 1} \right] = 0 \tag{17}$$

当 τ_s 取有限值时, 方程(17) 变为 $\rho \sqrt{QDI_0}/(1 + \beta I_0) + D = 0$, 此方程只有在 $\rho < 0$ 时才成立。对方程(12) 求二阶导数并通过进一步分析可知, 当 $\rho < 0$ 时, $T-Q$ 曲线出现一极大值, 且 T 值比 $\rho = 0$ 时要大; 当 $\rho > 0$ 时, $T-Q$ 曲线没有极值, 且 T 值比 $\rho = 0$ 时要小, 如图 6 所示。由此可见, 噪声自关联时间 τ_s 也会使激光的弛豫过程发生显著变化, 但却明显区别于前一种情况。负的噪声互关联使激光的弛豫过程慢化了, 且对应某个特定的 Q 值(满足方程(17)), 弛豫过程被最大慢化了; 而正的互关联则使激光的弛豫过程变快。

3.3 噪声关联时间对功率谱的影响

仔细分析方程(8) 发现, 噪声互关联时间 τ_m 使得功率谱曲线出现单峰和双峰两种形式, 其临界方程为

$$\rho = - \frac{QI_0 + D(1 + \beta I_0)^2}{2(1 + \beta I_0)(\gamma^2 \tau_m^2 + 1) \sqrt{QDI_0}} \tag{18}$$

当方程(18) 取小于号时, 功率谱曲线为双峰, 取大于号时, 功率谱曲线为单峰。两种情形可用参数 $\rho-\tau_m$ 图来说明, 如图 7 所示。若在图中的区域 I 和 II 中各取两点, 并画出与这四点的参数对应的功率谱曲线, 如图 8 所示, 则可清楚看到功率谱曲线的两种形式。

由方程(13) 求出 $dS(\omega)/d\omega = 0$, 分析发现, 当 $\rho > 0$ 时, 功率谱 $S(\omega)$ 只有一个极值点 $\omega = 0$, 且在该点取极大值; 而 $\rho < 0$ 时 $S(\omega)$ 有三个极值点 $\omega = 0$ 及 $\omega_{1,2}$, 且在 $\omega = 0$ 处同样取极大值。由于 $S(\omega)$ 随 ω 的增大最终趋于零, 故 $S(\omega)$ 在 $\omega_{1,2}$ 两点必为负极小值, 而这是没有物理意义的。由

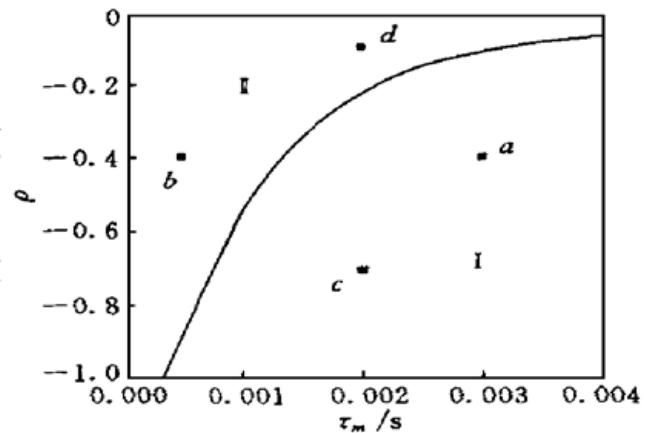


图 7 考虑 τ_m 时, 说明功率谱单、双峰的参数图

$Q = 20 \text{ s}^{-1}$, 其他参数值同图 1

Fig. 7 Parameter graph illustrating one peak and two peaks of $S(\omega)$ for $\tau_m \neq 0$

$Q = 20 \text{ s}^{-1}$, the rest of the parameter are the same as in Fig. 1

此得到, 自关联时间 τ_c 使得功率谱曲线只能以单峰的形式出现, 如图 9 所示。

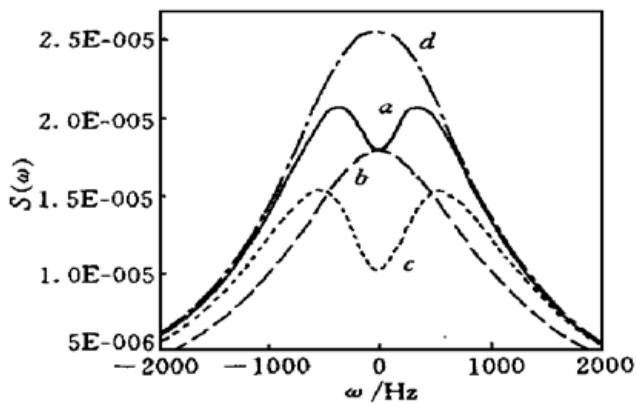


图 8 考虑 τ_m 时, 功率谱随频率的变化

Fig. 8 Evolution curves of $S(\omega)$ with ω for $\tau_m \neq 0$

$a: \rho = -0.4, \tau_m = 0.003$ s; $b: \rho = -0.4, \tau_m = 0.0005$ s; $c: \rho = -0.7, \tau_m = 0.002$ s; $d: \rho = -0.1, \tau_m = 0.002$ s The rest of the parameter are the same as in Fig. 7

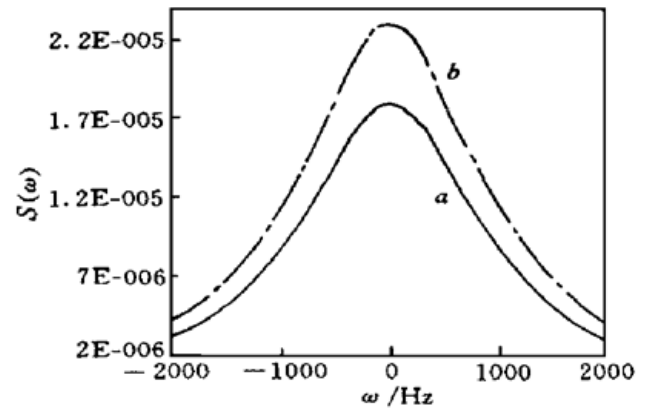


图 9 考虑 τ_c 时, 功率谱随频率的变化

Fig. 9 Evolution curves of $S(\omega)$ with ω for $\tau_c \neq 0$

$Q = 20$ s $^{-1}, \tau_c = 0.0002$ s. $a: \rho = -0.4; b: \rho = -0.2$ The rest of the parameter are the same as in Fig. 1

参 考 文 献

- 1 S. Q. Zhu. Steady-state analysis of a single-mode laser with correlations between additive and multiplicative noise. *Phys. Rev. A*, 1993, **47**(3): 2405~ 2408
- 2 X. Q. Wei, L. Cao, D. J. Wu. Effects of correlated noises on statistic property of single-mode laser. *Chin. Phys. Lett.*, 1996, **13**(8): 583~ 586
- 3 X. J. Zhou, L. Cao, D. J. Wu. Effects of correlated noises on dynamic properties of a single-mode laser. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1999, **19**(1): 7~ 12 (in Chinese)
- 4 G. E. Hernandez, R. Toral, M. S. Miguel. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(11): 6823~ 6830

Effects of the Noise-correlation-time of a Single-mode Laser

Wang Zhonglong Shi Yafei

(Department of Physics, Three Gorges University, Yichang 443000)

Cao Li Wu Dajin

(Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract By means of linear approximation method, the intensity correlation function, correlation time and power spectrum for the gain-noise model of a single-mode laser driven by correlated noises are derived. Effects of mutual-correlation-time and self-correlation-time for the noise on the above-mentioned properties of the laser are analysed and discussed. It is found that, in a single-mode laser system driven by correlated noises, effects of two noise-correlation-time on statistical properties of the laser are quite different. Some novel phenomena are obtained.

Key words single-mode laser, noise-correlation-time, intensity correlation function, power spectrum