

扩散限制聚集模型的光学小波变换*

冯璧华 章程军 金国钧 张克勤 潘永华

(南京大学固体微结构物理国家重点实验室 南京 210093)

提要 论述了用 Mexican-hat 小波函数簇实现扩散限制聚集(DLA)模型的光学小波变换(OWT)。采用一系列离散化的压扩因子,成功地将 DLA 分形图像分解成多种尺度成分。因此,该方法能简单、快速地从不同时段直观地观察分形体自相似结构的形成过程。还用光学小波变换的方法求出了 DLA 分形的分维值。实验结果证实了光学小波变换是一种实时分析 DLA 模型的重要方法。

关键词 光学小波变换,分形,分维,扩散限制聚集模型

1 引 言

著名的扩散限制聚集(DLA)模型是凝聚态物理学中一种重要的分形生长模型。分维值的测定可以推动分形动力学的研究和发展。小波变换类似于“数学显微镜”具有放大和移位功能,是分析分形局部奇异性的有力工具,我们选取 Mexican-hat 小波函数簇对 DLA 进行光学小波变换(OWT),这对于动态分析具有自相似结构的图形^[1,2],尤其在凝聚态晶体生长等方面有着重要意义。本文还推导了光学小波变换与分维的关系,将这一理论成功地应用于求 DLA 的分维实验中,实验结果与理论相符合。

2 对 DLA 模型实现光学小波变换的基本原理

1984 年 A. Grossmann 和 J. Morlet 引进小波概念,要求小波母函数 $h(x)$ 满足允许性条件。

小波变换的基函数是由小波母函数 $h(x)$ 经平移和压扩而产生的函数簇^[3]

$$h_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} h\left[\frac{x-b}{a}\right] \quad a, b \in R, a \neq 0$$

式中 a 为压扩因子,常取 $a > 0$, b 为平移因子。

信号 $f(x)$ 的小波变换定义为

$$F_w(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h^*\left[\frac{x-b}{a}\right] dx = \langle h_{a,b}(x), f(x) \rangle \quad (1)$$

对于较小的 a ,基函数收缩用来分析信号的高频部分,对于较大的 a ,基函数扩展,用来分析低频部份。这一“变焦”特性能很好地用于分形图像的局部细节分析。

* 国家科委攀登计划和国家自然科学基金(批准号:49571059)资助项目。

收稿日期:1998-07-09;收到修改稿日期:1998-10-28

分形的一个典型特性是在小长度标度下其结构的自相似性。数学上,对几何自相似性可表示成

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \tag{2}$$

λ 为标度因子, α 为标度指数, $f(x)$ 表示 R^n 空间中的分形振幅函数。对于严格的具有自相似结构的分形 α 即为分形维数 D 。分形的局部相似性意味着分形测度 μ 在 x_0 点邻近的标度变化满足^[1]

$$\mu[\beta(x_0, \lambda\epsilon)] = \int_{\beta(x_0, \lambda\epsilon)} f(x) dx \sim \lambda^{\alpha(x_0)} \mu[\beta(x_0, \epsilon)] \tag{3}$$

$\beta(x_0, \epsilon)$ 是以 x_0 为中心, ϵ 为半径的小球领域。若 $h(x)$ 为 R^n 上的解析小波,它在原点邻近是局部化的,在以某一点 b 为中心的领域,分形测度关于小波 h 的小波变换定义为^[1]

$$F_w(a, r, b) = a^{-n} \int h^* [a^{-1}r^{-1}(x - b)] f(x) d^n x \tag{4}$$

式中 r 为 n 维实空间的转动算子 $R^r h(x) = h(r^{-1}x)$ 。可以证明

$$F_w(\lambda a, b) \propto \lambda^{\alpha(b)-n} F_w(a, b) \tag{5}$$

(5) 式也说明可以从分形测度的小波变换获得分形维数。(4) 式在波矢空间可表示为^[1]

$$F_w(a, b, r) = \int \exp(jbq) \hat{h}(ar^{-1}q) \hat{f}(q) d^n q \tag{6}$$

上式说明函数 $f(x)$ 的小波变换实际上就是一个相关运算光路^[3]。滤波片系列的透过率函数由小波函数的傅里叶变换得到,上述能在光学上实现小波变换的方法称为光学小波变换。

本文采用 Mexican-hat 小波母函数

$$g(x) = (2 - x^2) \exp(-x^2/2) \quad x \in R^2 \tag{7}$$

其傅里叶变换为 $\hat{g}(q)$ 或 $G(q)$

$$\hat{g}(q) = 4\pi^2 q^2 \exp(-2\pi q^2) \tag{8}$$

为了方便实验中滤波片的制作,可将小波函数的傅里叶变换函数作二元值近似

$$\hat{g}(q) = \begin{cases} 1 & q_{\min} \leq |q| \leq q_{\max} \\ 0 & |q| < q_{\min}, |q| > q_{\max} \end{cases}$$

g 和 \hat{g} 均是旋转对称性的。 $\hat{g}(q)$ 在某个频带内取振幅透过率 1,而在低频和高频部分的振幅透过率为 0,因而,滤波函数为二元函数^[1],放大的滤波器系列是用计算机绘制的。再翻板缩小成透明片。

3 实验结果与分析讨论

小波变换的实验光路为一标准 $4f$ 系统,如图 1 所示。He-Ne 激光 ($\lambda = 632.8 \text{ nm}$, 10 mW), 偏振片 P_1, P_2 用于控制光强,扩束器 G , 光阑 K 限束,扩束器 G 中小孔 P 放在 L_1 ($f_1 = 58.9 \text{ cm}$, $D = 13.5 \text{ cm}$) 前焦面上, S_1 处放 DLA 样品, S_2 为 L_3 的前焦面,根据墨西哥人帽子制作的滤波片系列放在 S_2 面上; L_3 对滤波的频谱进行再次傅里叶变换,在 L_3 后焦面

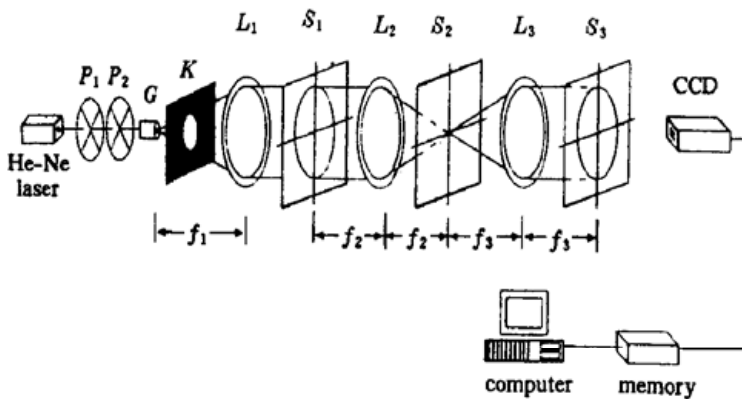


图 1 DLA 的光学小波变换分析光路

Fig. 1 Optical system for analyzing OWT of DLA

S_3 处得到物的小波变换; 变换得到的图像由 CCD 采集入计算机再进行逐点分析。

对随机分形 DLA 模型的光学小波变换如图 2 (a) ~ (f) 所示, 其中各图的放大因子相差 $3^{9/10}$ 倍^[11], 变换结果依次反映了 DLA 自相似结构的形成过程。

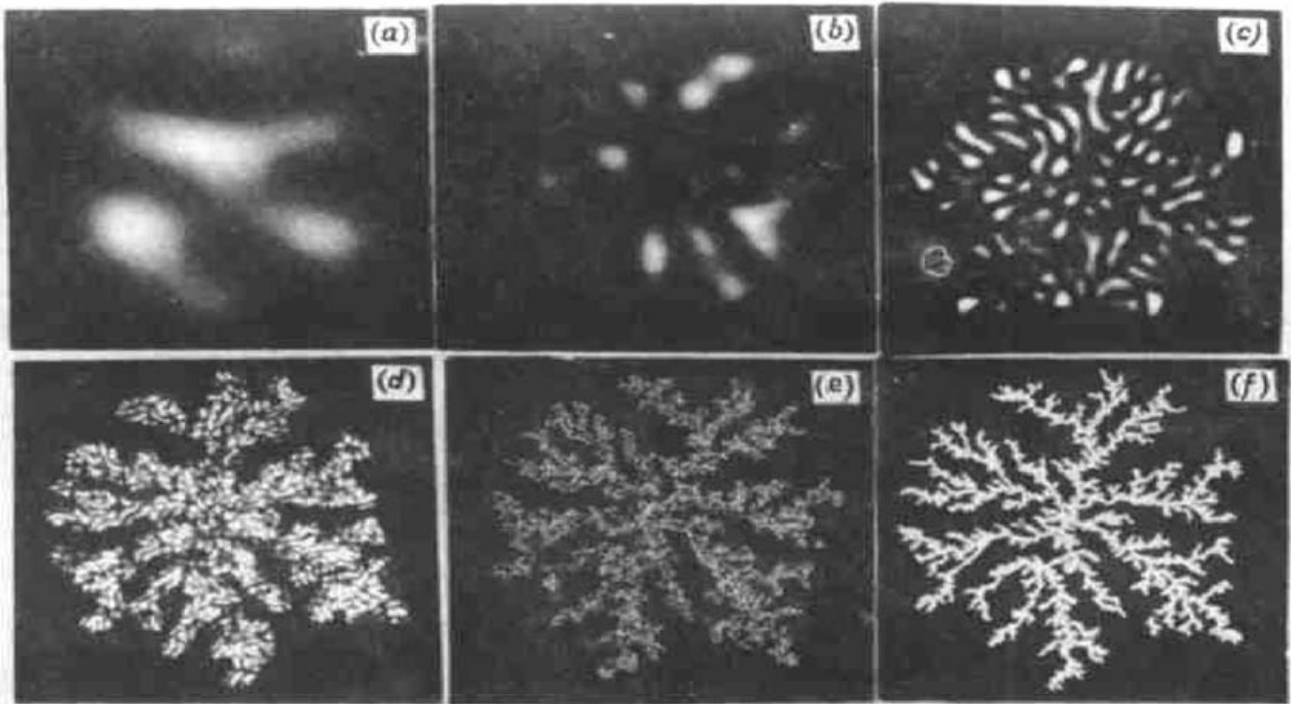


图 2 不同放大因子时 DLA 的光学小波变换

Fig. 2 OWT for DLA with different dilation factors

(a) $a = a^*$; (b) $a = a^* / 3^{9/10}$; (c) $a = a^* / 3^{9/5}$; (d) $a = a^* / 3^{27/10}$; (e) $a = a^* / 3^{18/5}$; (f) $a = a^* / 3^{9/2}$

由光学傅里叶变换中变换面坐标与频率的关系可知 a^* 的取值为物函数的最大尺寸 L 和傅里叶变换透镜焦距 f_2 的函数 $a^* = \frac{M^2}{L}$, 并且压扩因子相差 $3^{9/10}$ 倍^[11]。通过改变离散化的压扩因子对 DLA 进行光学小波变换成功地将分形图像分解成多种尺度成分。并分析 S_3 面上 x_0 点 CCD 记录的光强 I 求分维。指数因子^[4] $K(x_0) = 2[\alpha(x_0) - 2]$ 。图 3 反映了 DLA 模型光学小波变换的不同点的 $I \sim a$ 的对数关系, 其拟合直线的斜率计算出 DLA 的 α 值为 1.67。

上述用 Mexican-hat 小波函数的频谱作为滤波函数, 滤波器由此频谱作二元近似得到, 即一环带滤波器, 此近似引入的误差较小, 因 $g(\hat{q})$ 在半功率点处的斜率有极大值, 其切线角度达 89° , 可见此时函数值的迅速变化完全可近似为一突变, 而且整个实验是通过一系列小波函数变换结果从拟合直线的斜率求得分维值的, 使因单个小波近似带来的误差影响能降到最低。

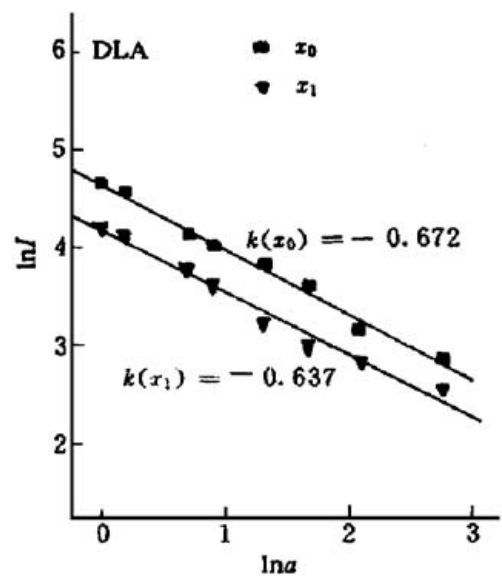


图 3 DLA 分形图形光学小波变换的实验结果

Fig. 3 Experimental results for OWT of DLA fractal

4 结束语

本文对 DLA 进行光学小波变换有二个独特的优点: (1) 可以简单快速地从不同时段直观地观察分形体自相似结构的形成过程, 这对于动态分析具有自相似结构的图形, 尤其是凝聚态晶体生长等方面有着重要意义; (2) 分维值的测定可以推动分形动力学的研究和发展^[4], 光学小波变换求分维的方法有直观简便、不需占用大量存储空间、又能实时、平行处理分形图像。尤其在分析分形局部奇异性等领域有着迷人的前景。

参 考 文 献

- 1 E. Freysz, B. Pouligny, F. Argoul *et al.*. Optical wavelet transform of fractal aggregates. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(7): 745~ 748
- 2 Zhang Chenjun, Jin Guojun, Feng Bihua. Optical fractal image produced by convolution. *Proc. SPIE*, 1996, **2866**: 62~ 64
- 3 Sheng Yunlong, Roberge Danny, Szu Harold. Optical wavelet transform. *Opt. Eng.*, 1992, **31**(9): 1840 ~ 1845
- 4 J. F. Muzy, B. Pouligny, E. Freysz *et al.*. Optical-diffraction measurement of fractal dimensions and $f(\alpha)$ spectrum. *Phys. Rev.*, 1992, **45**(12): 8961~ 8964

Optical Wavelet Transform of Diffusion-limited Aggregate Pattern

Feng Bihua Zhang Chengjun Jin Guojun Zhang Keqin Pan Yonghua
(National Laboratory of Solid State Microstructures, Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract The method of realizing optical wavelet transform (OWT) with Mexican-hat wavelet function for diffusion-limited aggregate (DLA) pattern is described in this paper. DLA fractal pattern is successfully dissolved into different scale patterns by using a series of discrete dilation factor. The advantage of optical wavelet transform (OWT) is that the constructing process of self-similarity in fractal pattern can be observed simply and rapidly from the domain of different time. DLA Fractal dimension has been also obtained using the method of the OWT in this paper. The experimental results have proved that OWT is an important method to analyze DLA pattern in real time.

Key words optical wavelet transform, fractal, fractal dimension, diffusion-limited aggregates pattern