

光束自聚焦效应的数值研究*

李忠东^{1,2} 郭 旗¹ 林为干²

(¹ 华南师范大学量子电子学研究所 广州 510631; ² 电子科技大学应用物理研究所 成都 610054)

提要 对于强激光在非线性各向同性介质中的光束自聚焦现象得出的矢量波方程模型, 使用自适应跟踪传输光束的算法程序进行了数值计算。数值计算显示, 在光束自聚焦过程中, 光波的轴上峰值强度是逐渐衰减的, 且在传输过程中具有一定的空间周期性。得出了在自聚焦过程中没有光束崩溃的结论。

关键词 强激光, 非线性, 光束自聚焦, 矢量理论, 数值分析

1 引 言

非线性媒质中的激光光束自聚焦是非线性光学领域一个非常具有探索意义的方向。在自聚焦领域从事的研究引起了大量的讨论。30 多年来, 发表了许多关于自聚焦主题的文章^[1-5]。这些文章解决了一些争论, 但强激光光束自聚焦现象理论上的理解仍未完善。自聚焦效应的早期理论^[1,2]是建立在傍轴近似波方程基础上, 预示了在 Kerr 媒质中在自聚焦焦点处光束的崩溃。Feit 和 Fleck^[3]对于标量波方程应用非傍轴算法来数字描述光束的自聚焦过程, 数字结果显示自聚焦过程中无光束的崩溃情况发生。他们的结论是从标量波方程出发, 虽然可以解释自聚焦的一些性质, 但是由于没有考虑 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 项对传输的影响, 所以对于光波在非线性媒质中的传输性态的描述是不完全的。Fibich^[4,5]对于标量波方程用绝热分析的方法, 推演出关于自聚焦小扰动效应的分析公式, 得到了比 Feit 和 Fleck 更精确的半解析结果。

本文直接从电磁场的麦克斯韦方程出发研究激光光束自聚焦效应。通过量级分析理论^[6]建立了新的矢量波方程模型, 使用自适应的分步傅里叶方法(SA-S-SSFM)进行了数值计算, 较好地数值描述了自聚焦过程, 得出了自聚焦过程中光束非崩溃的结果。

2 光束传输方程

如果假设电场强度矢量 $\mathbf{E}(r, t)$, 磁场强度矢量 $\mathbf{H}(r, t)$, 电位移矢量 $\mathbf{D}(r, t)$ 以及非线性极化矢量 $\mathbf{P}_{NL}(r, t)$ 为下列形式

* 国家自然科学基金面上项目(批准号 19674015)、国家自然科学基金重点项目(批准号 69789801)、国家教委留学回国人员科研启动基金和广东省“千百十工程”优秀人才培养基金资助项目。

李忠东: 电子科技大学博士生。

收稿日期: 1999-02-10; 收到修改稿日期: 1999-04-05

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, t) &= (1/2)\mathbf{E}(r) \exp(-i\omega t) + C. C., & \mathbf{H}(r, t) &= (1/2)\mathbf{H}(r) \exp(-i\omega t) + C. C., \\ \mathbf{D}(r, t) &= (1/2)\mathbf{D}(r) \exp(-i\omega t) + C. C., & \mathbf{P}_{NL}(r, t) &= (1/2)\mathbf{P}_{NL}(r, t) + C. C., \end{aligned}$$

则在无自由电荷存在的非线性各向同性介质中, 时谐麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E}(r) = i\omega\mu_0\mathbf{H}(r), \quad \nabla \times \mathbf{H}(r) = -i\omega\mathbf{D}(r) \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{D}(r) = 0 \quad (1b)$$

又由物构方程 $\mathbf{D}(r) = \epsilon_0 n_0^2 \mathbf{E}(r) + \mathbf{P}_{NL}(r)$, n_0 为线性折射率, \mathbf{P}_{NL} 为三阶非线性极化强度, 表示为

$$(\mathbf{P}_{NL})_i = (3\epsilon_0/4) \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega) \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k \mathbf{E}_l^*$$

这里 i, j, k, l 指场的笛卡儿分量, $\chi^{(3)}$ ($\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$) 是三阶非线性极化率的傅里叶变换形式。联立方程(1)和物构方程得到矢量波方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} \mathbf{E} + \frac{1}{n_0^2 \epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}_{NL}) + \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{P}_{NL} = 0 \quad (2)$$

写出入射矢量电场 $\mathbf{E}(r)$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(ik_0 z) \quad (3)$$

如果入射电场 \mathbf{E} 沿 x 方向极化(即上式(3)中仅有 A_x 分量), 对方程(2)进行合理的量级分析, 可以得到 A_x 的传输方程表达式^[8]

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial z} A_x + \frac{1}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 A_x + \mathcal{Y} |A_x|^2 A_x = \\ - \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x - \frac{\mathcal{Y}}{k_0^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (|A_x|^2 A_x) + \frac{2}{3} \left| \frac{\partial}{\partial x} A_x \right|^2 A_x - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x} A_x \right]^2 A_x^* \right] \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $k_0 = \omega n_0 / c$, ω 为角频率, $\mathcal{Y} = k_0 n_0 / n_2$ 。

方程(4)左边的项有相同的量级, 方程右边的项也有相同的量级并且比左边的项低 σ^2 的量级 [$\sigma = 1/(k_0 w) = \lambda/(2\pi w)$, w 为束宽]。在方程(4)中所有比左边的项低 σ^4 量级的项可忽略掉。右边第二项是 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的贡献。因为方程(4)右边所有的项有相同的量级并且比左边的项低 σ^2 的量级, 当有足够大的初始束宽 w (或者说, 小的初始 σ) 的光束在非线性媒质中传输发生自聚焦时, 强烈的光强增长使得右边所有项产生的效应不可能再忽略。

通过归一化变换

$$A_x(x, y, z) = \sigma \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} u(\xi, \eta, \zeta), \quad (x, y, z) = (w\xi, w\eta, l\zeta) \quad (5)$$

这里 $l = k_0 w^2$ 为衍射长度, 方程(4)变为

$$i \frac{\partial}{\partial \zeta} u + \frac{1}{2} \nabla_{\xi, \eta}^2 u + |u|^2 u = -\sigma^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} u + \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (|u|^2 u) + \frac{2}{3} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} u \right|^2 u - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} u \right]^2 u^* \right] \right] \quad (6)$$

这里 $\nabla_{\xi, \eta}^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \partial^2 / \partial \eta^2$ 。为了使用分步傅里叶方法(SSFM)数值求解方程(6), 必须将 $\partial^2 / \partial \zeta^2$ 用横向算子替代。将方程(6)部分微分得到 $\partial^2 / \partial \zeta^2$ 的表达式。将该表达式代入方程(6)并且保持所有项达到 σ^2 的量级, 得到

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} u = i \frac{1}{2} \nabla_{\xi, \eta}^2 u - i \frac{\sigma^2}{8} \nabla_{\xi, \eta}^4 u + i |u|^2 u - i \sigma^2 N_h u + \sigma(\sigma^4) \quad (7)$$

这里

$$\begin{aligned} N_h = |u|^4 / 2 + u^* (\partial^2 u / \partial \eta^2 - \partial^2 u / \partial \xi^2) + |\partial u / \partial \eta|^2 - 11 |\partial u / \partial \xi|^2 / 3 + \\ u^* [(\partial u / \partial \eta)^2 - 7(\partial u / \partial \xi)^2 / 3] / (2u) - u \partial^2 u^* / \partial \xi^2 \end{aligned} \quad (8)$$

3 数值方法

为了将非线性色散媒质脉冲传输问题中广泛使用的 SSFM^[7] 应用于光束自聚焦过程的数值计算, 将方程(8) 改写为如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = (D + N)u \quad (9)$$

此处 D 为微分算子, 表示在线性介质内的衍射; N 为非线性算子, 表示在光束传输过程中的非线性效应。这些算符表达为

$$D = i \frac{1}{2} \nabla_{\xi, \eta}^2 u - i \frac{\sigma^2}{8} \nabla_{\xi, \eta}^4 u \quad (10)$$

$$N = -i\sigma^2 N_h + i|u|^2 u \quad (11)$$

文献[8] 使用 SSFM 对方程(9) 进行了数值模拟。但其仅对细光束参数 ($\sigma_0 = 0.07$, 此时的光束束宽约为 2.3λ , 即仅达到波长量级) 情况下的自聚焦情况进行了计算。细光束情况下, 光束自聚焦表现得不是很剧烈, 在计算中只要将横截面空间网格取得足够大(例如, 256×256 , 1024×1024 矩阵网格甚至更大), 就可以将所有的数据点包含在计算中。但这样做的计算量会很大, 可能要求超级计算机来完成模拟计算。

一旦初始光束半径增加很大, 例如粗光束情况 ($\sigma_0 = 0.0007$, 此时的光束束宽约为 230λ , 若波长为 $1 \mu\text{m}$, 束宽就是 $230 \mu\text{m}$), 此时引发的自聚焦非常剧烈, 光束收缩也非常强烈, 束宽可能收缩到 $4 \sim 5 \mu\text{m}$ 。在自聚焦焦点处, 束宽可能收缩到初始束宽的 $1/46$ 。直接使用文献[8] 的方法计算时, 如果横截面上截断宽度为 6, 横截面空间网格中初始参与计算的数据点为 256×256 矩阵, 若在初始高斯幅度分布 $u(\xi, \eta, \zeta = 0) = u_0 \exp[-(\xi^2 + \eta^2)/2]$ 中 ξ 或 η 方向上认为幅度的 e^{-8} 之后的数据点为无效数据“零”(实际上并不为零, 这里是为了简化说明), 则有效数据点约为 170×170 矩阵。而在自聚焦焦点处, 虽然横截面空间网格中参与计算数据点仍然是 256×256 矩阵, 但有效数据点仅约为 4×4 矩阵(若假设光束仍是高斯分布。这种假设在分析中是合理的), 即仅有 16 个有效点参与计算。一方面, 并不是所有的数据点都包含有效信息, 造成很大的计算浪费; 另一方面, 在自聚焦计算过程中, 一旦光束急剧收缩使得有效数据点不够多(当 $\sigma_0 \rightarrow 0$ 时, 甚至可能仅有一个)时, 使用 SSFM 直接计算的结果可能产生极大偏差, 从而导致计算没有意义。

由于直接使用 SSFM 无法保证在自聚焦焦点附近有足够多的有效数据点用于计算, 其在大光束自聚焦情况下将导致极大误差。因此, 在大光束自聚焦传输过程中该方法不适用。我们对该方法进行了修正。

为了在计算模拟中获得足够的有效数据值, 必须在适当的传输距离处的横截面上利用双三次样条^[9, 10] 对二维数据点矩阵进行插值处理, 以便能自适应地跟踪光束的变化。方法是: 在计算中, 当光束收缩到某一尺寸时(例如, 收缩 10%), 横截面上的截断宽度也以相应比例减小。对此时的截断宽度所包含的数据点进行内插值处理, 使得截断宽度内仍有足够的有效数据点并保持总的矩阵网格(例如: 256×256 矩阵); 光束散开到某一尺寸(例如, 扩大 10%) 时, 截断宽度以相应比例增大, 在该位置对新的截断宽度所包含的数据点进行外插值处理, 使得截断宽度内仍有足够的有效点并保持总的矩阵网格。这样就可以保证在横截面上使用的网格数据点矩阵在每一次计算中总能保持有足够的有效数据点, 以保证计算精度。

需要补充的是, 在运用外插程序时, 一般的做法是在边界上补 0 以便使二维数据点保持总的矩阵网格, 但这样做的结果可能使得下一次计算的函数值产生震荡^[11]。如果 $2N$ 个元素的数

据串由于加上一串 0 而扩充到 $2M$ 个元素时, 那就可能有突变了。于是, 不光滑的结构就可能出现于函数中。同样, 在函数外插时, 如果相当光滑的 $2N$ 个元素的数据串连续四个元素是放置 0 时, 则震荡就可能出现在函数中。因此, 增加 0 并不总是组成 $2N$ 个元素数据串的最好办法。要想得到比添上 0 更好地保持所期望的结果的方法是添上更加真实的虚拟值。考虑到这个原因, 在外插程序中, 对边界的处理是: 将二维边界的值赋为最靠近其数据点的值。并且, 外插时使边界上被舍弃的数据点尽可能地少。

另外, 文献[8] 计算中主要的误差项是 $(1/2)h^2[D, N]$, 该方法仅达到步长 h 的二阶精度。我们使之得到了提高。方法是在 $\zeta \rightarrow \zeta + h$ 段光脉冲的传输采用不同的方法。

将方程(9) 替换为

$$u(\zeta + h, T) \cong \exp\left[\frac{h}{2}D\right] \exp\left[\int_{\zeta}^{\zeta+h} N(\zeta') d\zeta'\right] \exp\left[\frac{h}{2}D\right] u(\zeta, T) \quad (12)$$

主要的不同是非线性效应包含在段中间而不是在段边界。中间指数项积分包含非线性算符 N 对 ζ 积分是有用的。如果步长 h 足够小, 可以由 $\exp(hN)$ 近似。使用方程(12) 的对称形式最重要的是误差项为步长 h 的三阶量级。此即为对称的分步傅里叶方法(S-SSFM)。

分步傅里叶方法的精度可以进一步得到提高。通过对方程(12) 的积分赋以精确的值, 而不是用 hN 近似。一个简单的方法是应用梯形法则, 将积分近似为

$$\int_{\zeta}^{\zeta+h} N(\zeta') d\zeta' = \frac{h}{2} [N(\zeta) + N(\zeta + h)] \quad (13)$$

然而, (13) 式的实现不是简单的, 因为 $N(\zeta + h)$ 在中间段 $\zeta + h/2$ 处不知道。这要求一个迭代过程, 用 $N(\zeta)$ 代换 $N(\zeta + h)$ 来实现迭代初始化。方程(13) 被用来估计 $u(\zeta + h, T)$, 该值转而又用来计算 $N(\zeta + h)$ 的新值。尽管迭代过程消耗计算时间, 但是新算法提高了精度使步长增加, 减少了整个计算时间。我们采取了该思路。

在插值算法中, 插值的误差为 $O(\delta^4)^{[9]}$, 其中 $\delta = \max_{i,j}(h_i, k_j)$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$), h_i 或 k_j 分别为在某一距离点处, 原始的网格数据矩阵中坐标 x 或 y 方向相邻两点之间的距离。我们取 $h_i = k_j = S/N$, S 为计算开辟的窗口(即截断半宽度), N 为数据矩阵一个方向的数据点数。仔细选择 S, N 和空间步长 $SL = h$ 的数值, 使得插值的精度高于分步傅里叶算法的精度。为了同时保证计算中有足够多的信息数据点, 在 $S = 6$ 时, 选择 $N = 256$ 可满足要求。这样在整个计算过程中, 由于插值造成的误差可以忽略, 使得整个算法的误差仅为分步傅里叶方法的误差。

这样, 我们的数值方法可以称为自适应的分步傅里叶方法(SA-S-SSFM)。它对于自聚焦中初始光束半径的大小没有限制。

在计算实验中, 由于可以自适应地保持有效数据点, 从而可以大大地减少矩阵网格的数目。这样, 计算机的计算量大大减少, 在 PC 机上就可以很好地进行传输模拟。

4 数值实验结果和讨论

我们使用的初始光束参数是对称的高斯光束 $u(\xi, \eta, \zeta = 0) = u_0 \exp[-(\xi^2 + \eta^2)/2]$, 其中 $u_0 = 1.4575$ 。选择初始光强 $|u_0|^2$, 使得入射功率在自聚焦的临界功率之上。在细光束情况下 ($\sigma_0 = 0.07$, 对应的光束宽度 $w_0 \approx 2.28 \mu\text{m}$), 计算了传输过程, 轴上强度 $|u|^2$ 示于图 1(a)。

图 1(a) 中显示出, 在三维情况下, 轴上强度呈现衰减的震荡并将传输下去。光强度的崩溃不会发生。在我们的模型中, 损耗主要来自非线性媒质中线偏振的入射场激发的纵向场。该

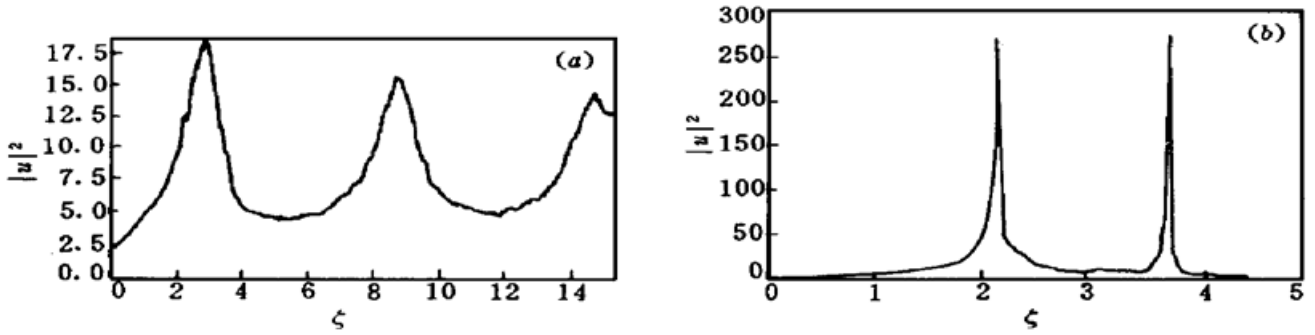


图 1 归一化轴上强度 $|u|^2$ 与归一化传输距离 ζ 的关系

初始条件为 $u(\xi, \eta, \zeta = 0) = u_0 \exp[-(\xi^2 + \eta^2)/2]$, 其中 $u_0 = 1.4575$

Fig. 1 Relationship between the normalized on-axis intensity $|u|^2$ and the normalized transmission distance ζ
The initial condition is $u(\xi, \eta, \zeta = 0) = u_0 \exp[-(\xi^2 + \eta^2)/2]$, where $u_0 = 1.4575$

纵向场产生的能流密度矢量垂直于传输方向, 使得在垂直于传输方向上有部分能流逃逸。图 1(a) 与文献[8] 所描述的自聚焦过程的图示几乎是一样的, 由于计算算法和精度的不同使得在第一个峰处有约 4% 的差距。可见, 在细光束(束宽尺寸为: $w_0 \approx 2.28 \mu\text{m}$) 情况下, 两种方法差异不大。

对于大光束的情况 ($\sigma_0 = 0.0007$, 此时光束束宽 $w_0 \approx 228 \mu\text{m}$), 计算得到图 1(b)。

初始传输时, 在曲线开始上升直到光强最大值的整个阶段, 非线性项对光强有强烈的会聚作用, 非线性效应始终占上风, 轴上强度是一直上升的; 由于衍射项与光束半径成平方反比例关系, 束宽越小, 衍射越大。在归一化距离 $\zeta \cong 2.14$ 附近, 一旦上升过程中光束会聚得极其小, 衍射项马上产生明显作用。当衍射项的作用大于非线性项的作用时, 光束无法维持继续会聚, 会聚的趋势受到抑制, 光束开始散开, 使得光强在横截面重新分布, 曲线被从最大值“拉”了下来; 而当光强重新达到能够自聚焦的临界点时, 非线性项重新占优势, 光束又开始会聚。上述过程重复进行。在传输过程中, 轴上强度呈现一定的空间周期性。空间周期(归一化值) 约为 1.62。

归一化距离 $\xi \cong 2.14$ 可以认为是自聚焦的焦点 ζ 。在该处附近, 轴上光强增长率是 $(\zeta - \zeta)^{-2/3}$, 这与文献[12] 是符合的。可以预见, ζ 是随时间而变化的(如果我们在三维空间波方程基础上加上关于时间的项)。这种运动焦点的图像(即自聚焦“细丝”)很好地描述了在液体中所观察到的纳秒激光脉冲自聚焦的结果^[1]。我们正对其进行理论和数值上的研究。

我们对图 1(b) 第一个峰值横截面的强度分布进行了计算, 示于图 2。

可以看到: 初始对称的高斯分布经过自聚焦后分布不对称了, 这与文献[8] 的解释一致。而且, 横截面上的轴上光强分布是光滑的, 在边界点处虽然有小的起伏, 但其值远远小于中心附近的强度值, 对于整个分布是没有影响的。

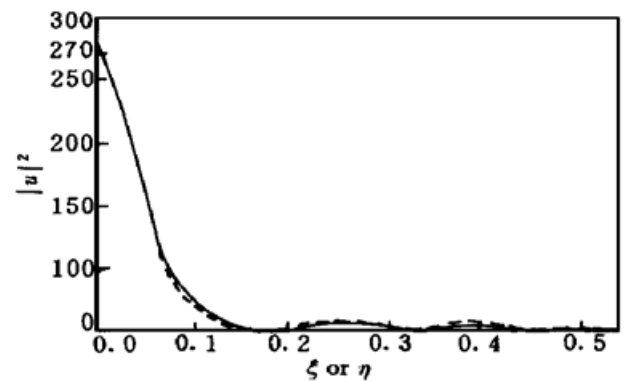


图 2 横向归一化强度分布

Fig. 2 Transverse normalized intensity distribution
Solid line shows the intensity distribution at $\xi = \xi_{\text{max}}$, dotted line is the η -direction distribution

综上所述, 标量傍轴理论在解释自聚焦现象时不再是合理的。我们直接从麦克斯韦方程出发, 通过矢量量级理论得到了矢量波方程, 建立了新的波方程模型。数值计算发现传输过程中轴上光强是衰减地向前传播的, 传输过程具有一定的空间周期性。得到的光束非崩溃的结果与数值实验结果^[3,4]是相吻合的。因为直接从麦克斯韦方程出发, 考虑了 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 项, 对激光光束自聚焦过程的描述更全面。

参 考 文 献

- 1 Y. R. Shen. Self-focusing: Experimental. *Prog. Quantum Electron.*, 1975, **4**(1): 1~ 34
- 2 J. H. Marburger. Self-Focusing: Theory. *Prog. Quantum Electron.*, 1975, **4**(1): 35~ 110
- 3 M. D. Feit, J. A. Fleck, Jr.. Beam nonparaxiality, filament formation, and beam breakup in the self-focusing of optical beams. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1988, **5**(3): 633~ 640
- 4 Gadi Fibich. Small beam nonparaxiality arrests self-focusing of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(23): 4356~ 4359
- 5 Gadi Fibich. Adiabatic law for self-focusing of optical beams. *Opt. Lett.*, 1996, **21**(21): 1735~ 1737
- 6 D. Marcuse. Light Transmission Optics. 2nd ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 9~ 11
- 7 G. P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics. Boston: Academic, Mass., 1989. Chap. 2
- 8 Sien Chi, Qi Guo. Vector theory of self-focusing of an optical beam in Kerr media. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(15): 1598~ 1600
- 9 Xiong Zhenxiang. Interpolating Polynomials and Splines. Beijing: Publisher of Defence Industry, 1995. Chap. 2, 4, 5, 6 (in Chinese)
- 10 Xu Shiliang. The Assembly of Fortran Algorithm. 2nd ed. Beijing: Publisher of Tsinghua University, 1995. Chap. 4, 5, 8 (in Chinese)
- 11 Ronald N. Bracewell, Yang Yan-Chang *et al.* transl.. The Fourier Transform and Its Applications. Beijing: Publisher of Demos Post-office, 1986. Chap. 18 (in Chinese)
- 12 P. L. Sulem, C. Sulem, A. Patera. Numerical simulation of singular solutions to the two-dimensional cubic Schrodinger equation. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 1984, **7**(4): 755~ 778

Numerical Research on the Self-focusing of Optical Beams

Li Zhongdong^{1,2} Guo Qi¹ Lin Weigan²

¹Institute of Quantum and Electronics in South China Normal University, Guangzhou 510631

²Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology, Chengdu 610054

Abstract The vector theory on self-focusing of a high-power laser beam in the non-linear isotropic medium is presented. Based on the laser beam tracking algorithm with self-adapting, which is the modification of the split-step Fourier methods, the numerical results show that the peak intensity on the axis of the light beam reduces little by little, and it takes on some space periods. The non-collapse of light beam in self-focusing is given.

Key words high-power laser, nonlinear, self-focusing, vector theory, numerical methods