

# 利用球差透镜获得超衍射极限聚焦\*

蒲继雄

(华侨大学电气技术系 泉州 362011)

**提要** 从 Huygens-Fresnel 衍射积分公式出发,得到了高斯光束经过球差透镜聚焦之后聚焦光场的光强分布的表示式。数值计算结果表明,当透镜存在负球差时,可获得超衍射极限聚焦,即得到的聚焦光斑比高斯光束经过无球差透镜聚焦而得到的聚焦光斑还小。并且,透镜的负球差系数越大,得到的聚焦光斑越小。相反,当高斯光束经过正球差透镜聚焦,得到的聚焦光斑比无球差时大。透镜的球差系数愈大,得到的聚焦光斑愈大。讨论了透镜的球差对轴上光强最大点(最佳聚焦点)的影响。

**关键词** 超衍射聚焦, 高斯光束, 球差

激光在光通讯、光互连和激光材料加工等领域得到了广泛应用,因此,对激光光束的传输和聚焦的研究是非常重要的。许多研究激光光束聚焦的工作都是假定聚焦透镜是没有像差的<sup>[1-8]</sup>。并且认为在这种情况下可获得的聚焦光斑最小,即达到所谓的衍射极限。获得小的聚焦光斑是非常有用的。例如,在制作高密度计算机芯片和激光微加工中都要求聚焦光斑愈小愈好;在记录和读 CD 光盘时,聚焦光斑愈小,意味着 CD 光盘具有更高的存储密度和更长的播放时间。因此,如何得到比衍射极限还小的聚焦光斑(超衍射极限聚焦)是一项诱人的研究课题。近十年来,人们提出用二元光学的方法,获得超衍射极限聚焦<sup>[9,10]</sup>。本文从 Huygens-Fresnel 衍射积分公式出发,得到高斯光束经过球差透镜聚焦之后聚焦光场的光强分布的表达式,并对高斯光束经过球差透镜聚焦之后的聚焦光场进行数值计算。计算结果表明,当透镜存在负球差时,可获得超衍射极限聚焦,即得到的聚焦光斑比高斯光束经过无球差透镜聚焦而得到的聚焦光斑还小。并且,透镜的负球差系数愈大,得到的聚焦光斑愈小。相反,当高斯光束经过正球差透镜聚焦,得到的聚焦光斑比无球差时大。而且,透镜的球差系数愈大,得到的聚焦光斑愈大。

## 1 理 论

如图 1 所示,波长为  $\lambda$ (波数为  $k = 2\pi/\lambda$ ) 的高斯光束被一球差透镜聚焦。假设高斯光束的束腰恰好处在透镜的位置,这个位置定为  $z = 0$ 。假定透镜的焦距为  $f$ 。这样,从透镜出射的任一点  $Q$  的光场可表示为

$$U_0(Q) = U_0(\rho, 0) = A_0 \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2}\right] \exp\left[ik\left(\Phi_R - \frac{\rho^2}{2f}\right)\right] \quad (1)$$

\* 惯性约束聚变青年基金资助项目。

式中,  $w$  为高斯光束的束腰半径;  $A_0$  为一正常数;  $\Phi_R$  为球差。假定透镜的口径半径为  $a$ 。

根据 Huygens-Fresnel 衍射积分公式, 可得到衍射光场(如  $P$  点) 的光场<sup>[8]</sup>

$$U(P) = - \frac{ik}{2\pi} \iint U_0(Q) \frac{\exp(ikS)}{S} dS \quad (2)$$

式中,  $S$  为  $Q$  点和  $P$  点之间的距离; 积分区间为透镜的口径。 $Q$  点和  $P$  点可分别用柱坐标  $(\rho', \varphi', z = 0)$  和  $(\rho, \varphi, z)$  表示。

在菲涅耳近似下, (2) 式中分母中的  $S$  可近似为

$$S \approx z \quad (3)$$

而指数中的  $S$  可近似地表示为<sup>[3]</sup>

$$S \approx z - \frac{\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)}{z} + \frac{\rho'^2}{2z} \quad (4)$$

把(3)和(4)式代入(2)式, 得

$$U(\rho, \varphi, z) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{0}^{2\pi a} U_0(\rho', \varphi', z = 0) \exp\left[ ik \left[ \frac{\rho'^2}{2z} - \frac{\rho\rho' \cos(\varphi' - \varphi)}{z} \right] \right] \rho' d\rho' d\varphi \quad (5)$$

在上式中, 我们忽略了位相项  $\exp(ikz)$ 。

$$\text{对 } \varphi \text{ 的积分结果为} \quad 2\pi J_0 \left[ \frac{k\rho\rho'}{z} \right] \quad (6)$$

其中,  $J_0$  为零阶 Bessel 函数。

把(6)和(1)式代入(5)式, 得到

$$U(\rho, z) = \frac{ikA_0}{z} \int_0^a \exp\left[ -\frac{\rho^2}{w^2} \right] \exp\left[ ik \left[ \Phi_R - \frac{\rho^2}{2f} \right] \right] J_0 \left[ \frac{k\rho\rho'}{z} \right] \exp\left[ ik \frac{\rho'^2}{2z} \right] \rho' d\rho' \quad (7)$$

(7) 式即为高斯光束经过球差透镜聚焦之后聚焦光场的表达式。为了简单起见, 仅考虑初级球差对聚焦光场的影响。即  $\Phi_R$  可表示为<sup>[8]</sup>

$$\Phi_R = (S_1/w^4) \rho'^4 \quad (8)$$

把(8)式代入(7)式, 并进行变量代换, 得

$$U(r, z) = \frac{i\pi A_0}{z/f} \int_0^{N_a} \exp\left[ -\frac{X}{N_w} \right] \exp\left[ ikS_1 \frac{X^2}{N_w^2} \right] \exp\left[ ik \left[ \frac{1}{z/f} - 1 \right] X \right] J_0 \left[ \frac{2\pi r \sqrt{X}}{z/f} \right] dX \quad (9)$$

$$\text{上式中} \quad X = \frac{\rho'^2}{\mathcal{K}}, \quad r = \frac{\rho}{\sqrt{\mathcal{K}}} \quad (10)$$

$$\text{并且} \quad N_w = w^2/\mathcal{K} \quad (11)$$

称为高斯光束的菲涅耳数;

$$N_a = a^2/\mathcal{K} \quad (12)$$

称为透镜孔径的菲涅耳数。

由(9)式, 可得到聚焦光场的光强分布

$$I(r, z) = U(r, z) U^*(r, z) \quad (13)$$

根据(13)式, 可进行数值计算。下面利用 MathCAD 软件和 486 计算机对式(9)和(13)进行数值计算。在数值计算中, 光强被无球差情况下几何焦点处的光强归一化。

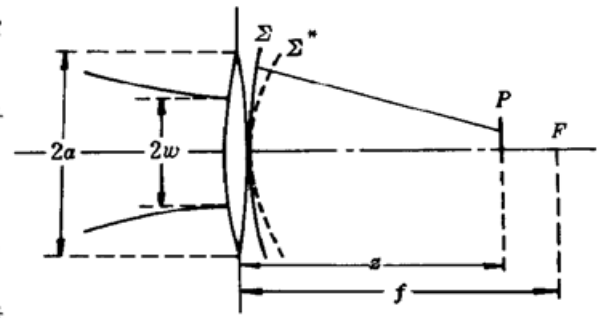


图 1 球差透镜聚焦高斯光束示意图

$\Sigma$  为透镜之后的波阵面;

$\Sigma^*$  为中心在  $z = f$  的参考球面

Fig. 1 Geometry for focusing Gaussian beams by a lens with spherical aberration

$\Sigma$  is the wavefront behind the lens;

$\Sigma^*$  is the spherical reference sphere centered at  $z = f$

## 2 利用球差透镜获得超衍射极限聚焦

如图 1 所示, 当高斯光束经过无像差且无光阑限制的透镜聚焦, 得到的聚焦光场的最小聚焦光斑为<sup>[11]</sup>

$$w_{\min} = \frac{\sqrt{N_w}}{\sqrt{1 + (\pi N_w)^2}} \sqrt{\lambda} \quad (14)$$

若入射的高斯光束的菲涅耳数  $N_w = 1$ , 由上式可得到最小的聚焦光斑  $w_{\min} = 0.303$  (单位为  $\sqrt{\lambda}$ , 下同)。这个聚焦光斑是在无像差情况下得到的最小聚焦光斑。因此, 它被称为聚焦高斯光束的衍射极限。

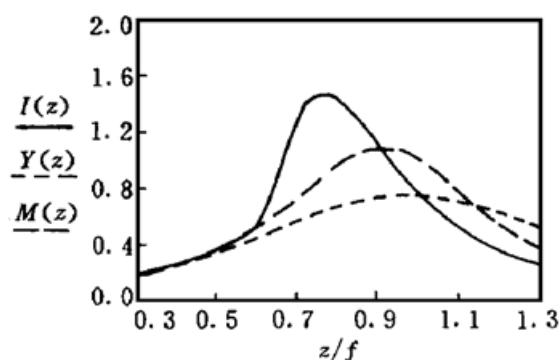


图 2 轴上点光强与  $z/f$  的关系

$kS_1 = \pm 0.2, 0, N_w = 1, N_a = 10$ .  $I(z)$  (实线),  $Y(z)$  (点线) 和  $M(z)$  (虚线) 分别为  $kS_1 = -0.2, 0.2$  和 0 情况下, 轴上点的光强分布

Fig. 2 Axial light intensity as a function of  $z/f$  in the situation of  $kS_1 = \pm 0.2, 0, N_w = 1$ , and  $N_a = 10$

$I(z)$  (solid line) is the transverse focused intensity distribution for  $kS_1 = -0.2$ ;  $Y(z)$  (dotted line) for  $kS_1 = 0.2$ ;  $M(z)$  (broken line) for  $kS_1 = 0$  (Same in other figures without specifying)

现在先研究聚焦光场轴上点的光强分布。图 2 为透镜有 (或无) 球差时聚焦光场轴上点的光强分布。图中, 球差系数为  $kS_1 = \pm 0.2$  和 0。另外,  $N_w = 1$  和  $N_a = 10$  ( $N_a \gg N_w$ , 即透镜可认为是无光阑限制)。由图 2 可见, 当透镜为无球差 ( $kS_1 = 0$ ) 时, 聚焦光场的轴上点的光强最大点不在几何焦点 ( $z/f = 1$ ), 而是在  $(z/f)_m = 0.905$ 。即落在透镜和几何焦点之间。这个现象就是被广泛研究的焦移效应。这时聚焦光场轴上光强最大点 (称为“最佳聚焦点”) 的光强为 1.101 (已被无球差时几何焦点的光强归一化)。当  $kS_1 = -0.2$  时, 最佳聚焦点移到  $(z/f)_m = 0.76$ 。这表明当透镜有负球差时, 最佳聚焦点往透镜方向位移。并且在这种情况下, 最佳聚焦点的光强为 1.474。比无球差时的最大光强还大。当  $kS_1 = 0.2$  时, 最佳聚焦点落在  $(z/f)_m = 0.965$ , 即当透镜存在正球差时, 最佳聚焦点往几何焦点位移。并且, 最佳聚焦点的光强比无球差时的最大光强还小。图 3 为透镜的球差系数  $kS_1 = 0, \pm 0.2$  和  $\pm 0.3$  时, 最佳聚焦点的光强分布。

图中的虚线为相应拟合的高斯分布。由图 3(a) 可见, 当透镜无球差时, 其光强分布为高斯分布, 即

$$I(r) = I_m \exp\left[-2 \frac{r^2}{w_{\min}^2}\right] \quad (15)$$

其中,  $I_m = 1.101, w_{\min} = 0.303$ 。这个最小聚焦光斑也可由 (14) 式得到。它即为高斯光束的衍射极限。

当透镜的球差系数  $kS_1 = 0.2$  和  $0.3$  时, 最佳聚焦点的光强分布仍然为高斯分布, 见图 3(b), (c)。此时, 其相应的高斯分布曲线的参数分别为  $I_m = 0.775, w_{\min} = 0.375$  (对  $kS_1 = 0.2$ ) 和  $I_m = 0.666, w_{\min} = 0.39$  (对  $kS_1 = 0.3$ )。由此可见, 当透镜存在正球差时, 最佳聚焦点处聚焦光斑半径 ( $w_{\min}$ ) 比无球差时大; 并且, 球差系数愈大, 最佳聚焦点处聚焦光斑半径愈大。

当透镜的球差系数为  $kS_1 = -0.2$  和  $-0.3$  时, 最佳聚焦点的光强分布近似为高斯分布。因此, 最佳聚焦处聚焦光斑半径仍定义为从中心点到光强为中心点光强的  $\exp(-2) \approx 0.135$  倍时的位置之间的距离。因此, 我们可得到, 当  $kS_1 = -0.2$  时, 最佳聚焦点处聚焦光斑半径  $w_{\min}$

$= 0.25, I_m = 1.474$ , 见图 3(d); 而当  $kS_1 = -0.3$  时, 最佳聚焦点处聚焦光斑半径  $w_{\min} = 0.235$ ,  $I_m = 1.596$ , 见图 3(e)。可见, 当透镜的球差为负时, 得到的聚焦光斑比无球差时还小。并且, 得到的最大聚焦光强比无像差时还大, 即得到了超衍射极限聚焦。负球差系数愈大, 得到的聚焦光斑愈小; 得到的最大聚焦光强愈大。

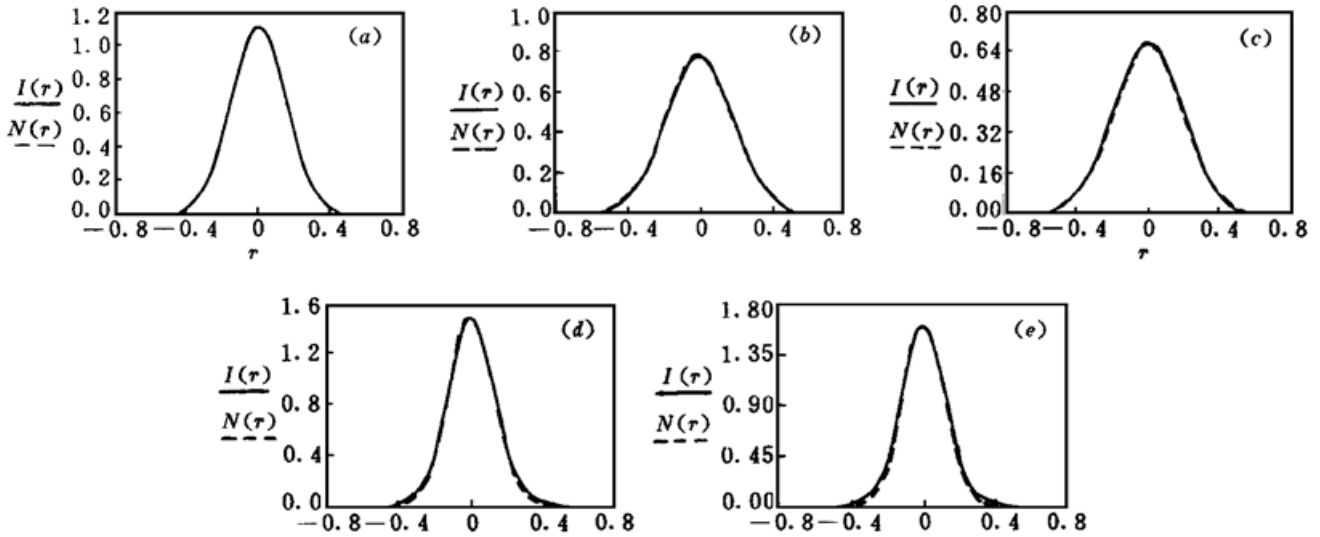


图 3 最佳聚焦点处横向光强分布 ( $I(r)$ : 实线)

(a)  $kS_1 = 0$ ; (b)  $kS_1 = 0.2$ ; (c)  $kS_1 = 0.3$ ; (d)  $kS_1 = -0.2$ ; (e)  $kS_1 = -0.3$ 。

其他参数为:  $N_w = 1, N_a = 10$ 。 $N(r)$  (点线) 为拟合的高斯分布

Fig. 3 Transverse focused intensity distribution ( $I(r)$ : solid line) at the optimum focal point for

(a)  $kS_1 = 0$ ; (b)  $kS_1 = 0.2$ ; (c)  $kS_1 = 0.3$ ; (d)  $kS_1 = -0.2$ ; (e)  $kS_1 = -0.3$ . Other parameters are given as:  $N_w = 1,$

$N_a = 10$ . The dotted lines in the figures are corresponding Gaussian distributions denoted as  $N(r)$

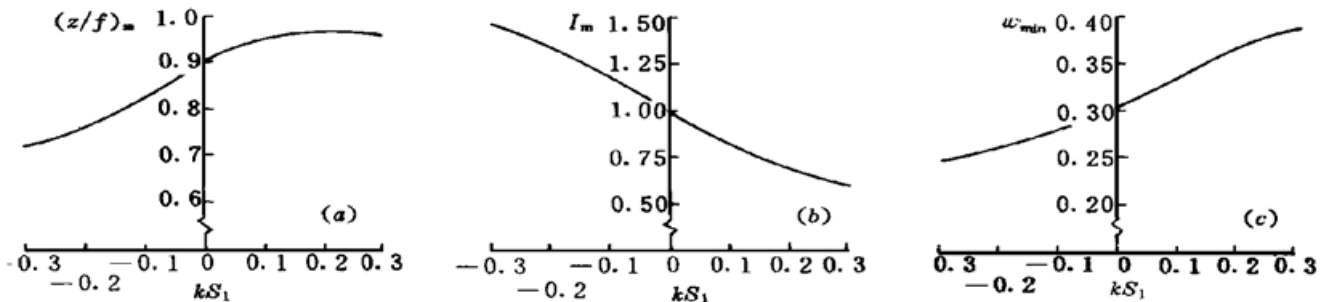


图 4 球差透镜对最佳聚焦点的位置 (a), 轴上点的最大光强 (b), 以及聚焦光束的光斑半径 (c) 的影响。

其他参数与图 2 相同

Fig. 4 The effects of coefficients of SA on (a) the best focal point; (b) the maximum axial focused intensities;

(c) the focused beam radius at best focal points. Other parameters are the same as in Fig. 2

图 4 给出了透镜的球差系数对最佳聚焦点位置、最佳聚焦点处的光强(最大聚焦光强)和最佳聚焦点处的光斑半径的影响。由图 4(a) 可以看出, 当透镜的球差为负时, 最佳聚焦点往透镜位移; 负球差系数愈大, 位移量愈大。相反, 当透镜为正球差时, 最佳聚焦点往几何焦点移动; 当球差系数较小时, 球差系数愈大, 最佳聚焦点愈往几何焦点移动。当  $kS_1 \geq 1.5$  时,  $kS_1$  的增大不再使最佳聚焦点明显往几何焦点移动。由图 4(b), (c) 可见, 当透镜的球差系数为负时, 最大聚焦光强比无球差时还大, 这时聚焦光斑比无球差时还小; 透镜的负球差系数愈大, 最大聚焦光强愈大, 聚焦光斑愈小。也就是说, 当透镜有负球差时, 可得到超衍射极限聚焦。相反,

当透镜的球差系数为正时,最大聚焦光强比无球差时小,这时聚焦光斑比无球差时大;透镜的球差系数愈大,最大聚焦光强愈小,聚焦光斑愈大。

### 参 考 文 献

- 1 Y. Li. Three-dimensional intensity distribution in low-Fresnel number focusing systems. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1987, **4**(8): 1349~ 1353
- 2 Y. Li, E. Wolf. Focal shift in focused truncated Gaussian beams. *Opt. Commun.*, 1982, **42**(3): 151~ 156
- 3 P. L. Overfelt, C. S. Kenney. Comparison of the propagation characteristics of Bessel, Bessel-Gauss, and Gaussian beams diffracted by a circular aperture. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1991, **8**(5): 732~ 745
- 4 Jixiong Pu. On axial light distribution in focused truncated Gaussian beams. *J. Optics (Paris)*, 1995, **26**(3): 105~ 108
- 5 Y. Li. Accurate approximation of focal shift in the transformation of truncated Gaussian beams. *Opt. Eng.*, 1993, **32**(4): 774~ 780
- 6 A. Yoshida, T. Asakura. Focusing a Gaussian laser beam without focal shift. *Opt. Commun.*, 1994, **109**(5, 6): 368 ~ 374
- 7 Jixiong Pu. Focusing Gaussian beams by an annular lens with spherical aberration. *J. Modern Optics*, 1998, **45**(2): 239~ 247
- 8 D. Y. Jiang, J. J. Stamnes. Focusing at low Fresnel numbers in the presence of cylindrical or spherical aberrations. *Pure Appl. Opt.*, 1997, **6**: 85~ 96
- 9 J. A. Davis, D. M. Cottrell, C. A. Maley *et al.*. Subdiffraction-limited focusing lens. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(19): 4128~ 4131
- 10 M. J. Simpson, A. G. Michedtte. Imaging properties of modified Fresnel zone plates. *Opt. Acta*, 1984, **31**: 403~ 413
- 11 Lu Baida. Laser Optics. Chengdu: Sichuan University Press, 1992. Chapter 3 (in Chinese)

## Lenses with Spherical Aberration for Generating Subdiffraction-limited Focusing

Pu Jixiong

(Department of Electric Technique, Huaqiao University, Quanzhou 362011)

**Abstract** Based on Huygens-Fresnel diffraction integral, an expression describing the focused field of Gaussian beams focused by a lens with spherical aberration is derived. The numerical results show that when the coefficient of the spherical aberration is negative, one can get subdiffraction-limited focusing, that is, one can achieve a smaller focused beam radius than that of no spherical aberration (SA) cases. The larger the coefficient of negative SA, the smaller the focused beam radius. On the contrary, when a Gaussian beam is focused by lenses with positive SA, the focused beam radius is larger than that of no-SA cases. And, the larger coefficient of positive SA, the larger the focused beam radius. The effect of the SA coefficient on the positions where the axial focused intensity is maximum (best focal point) is also discussed.

**Key words** subdiffraction-limited focusing, Gaussian beams, spherical aberration