

波像差与光束质量指标的关系

鲜 浩 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所 成都 610209)

提要 用数值计算的方法,研究了不同类型波像差及其组合的均方根值(RMS)和 β 及 Strehl 比的关系,建立了拟合关系式,并以此分析了 Kolmogroff 湍流的 r_0 与 β 的关系。

关键词 自适应光学,波像差,光束质量,光束传输

1 引 言

在诸多的光束质量指标中,对于光强分布接近均匀的光束,经常用的指标是光束质量因子 $\beta^{[1]}$ 和远场光斑的 Strehl 比^[2,3]。如以光束远场光斑的质心为中心,光斑半径 r 内的环围能量 (Encircled energy) 达到理想平面波远场光斑一级暗环 r_0 内的能量,则光束质量因子 $\beta = r/r_0$, 即通常所称的几倍衍射极限。Strehl 比是指实际远场光斑中心光强与理想无波像差的光斑中心光强之比,也称为峰值 Strehl 比 S_{peak} 。对于一些应用,也常用实际光斑中 r_0 范围内的环围能量与理想光斑之比来代替上述定义作为光束质量指标的特征,也称为环围 Strehl 比 S_{encircle} 。众所周知,光束质量下降是由于各种因素在光束的近场复振幅分布中引入误差,特别是引入波前相位误差(波像差)而导致的。波像差的大小经常用其均方根值(RMS)来表达。在光学和激光系统的设计和分析中,经常需要知道波像差和 β 或 Strehl 比的关系,例如要达到一定的 β 需要将波像差控制到多少 RMS 以及如何按波像差分配对各个部分允许的指标。但是由于波像差与 β 及 Strehl 比之间没有确定的解析关系,其影响也随波像差的空间频率而不同。因而研究两者之间的规律,对于光学和激光系统的设计和分析是十分有用的。

本文用夫郎和费衍射公式,用计算机仿真方法,研究不同类型的波像差对 β 和 Strehl 比的关系,并用 Monte Carlo 法对不同 Zernike 多项式的组合进行计算,建立了不同阶次的 Zernike 波像差及其组合的 RMS 值与 β 和 Strehl 比的拟合关系。作为一个例子,研究了符合 Kolmogroff 谱的大气湍流中相干长度 r_0 与 β 和 Strehl 比的关系。

2 数值计算方法

光波在 $z = R$ 的焦面上的光强分布与其近场复振幅存在以下解析关系^[4]

$$I(r) = \frac{1}{\lambda^2 R^2} \left| \int A(\rho) \exp[j\mathcal{Q}(\rho)] \exp[-2\pi j r \rho / \lambda R] d\rho \right|^2 \quad (1)$$

其中, $A(\rho) \exp[j\Phi(\rho)]$ 为光波的近场复振幅, $I(r)$ 为在远场的光强分布。我们可以由近场的复振幅和通过二维傅里叶变换计算其远场成像, 由此推算此时的 β 值及此时的 Strehl 比。光束的波面一般具有非常复杂的形状, 很难用简单的函数精确表示出来。在各种近似之中, Zernike 多项式是迄今为止较为广泛的一种^[4]。Zernike 多项式通常在圆域上定义, r 表示极轴, θ 表示极角

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k Z_k(r, \theta) \quad (2)$$

$Z_k(r, \theta)$ 的定义为

$$\left. \begin{aligned} Z_{\text{evenk}}(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \cos(m\theta) \\ Z_{\text{oddk}}(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \sin(m\theta) \end{aligned} \right\} m \neq 0$$

$$Z_k(r, \theta) = \sqrt{n+1} R_n^0(r) \quad m = 0 \quad (3)$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} r^{(n-2s)}$$

其中 m, n 应满足

$$\begin{cases} m \leq n \\ n - |m| = \text{even} \end{cases}$$

由于对焦点像的影响的主要因素是近场的相位, 为计算方便, 本文假设近场的强度分布均匀, 光瞳为圆形光瞳。

3 模拟计算与分析

从(1)式可以看出, 远场光斑实质上是近场相位的傅里叶变换。因此可通过离散傅里叶变换的方法计算出某种波像差的远场特性, 从而进一步分析波像差与 β 和 Strehl 比的关系。我们计算了各阶 Zernike 系数的波像差 W 与光束质量 β 的关系, 其中具有代表性的几项如图 1 所示。

由图 1 可见, 衍射极限 β_k 与波像差的均方根值 W 基本呈二次曲线性关系, 而且当 Zernike 的模式阶数不同时, β_k 与 W 具有不同的对应曲线。图 1 中十字线为计算的数据, 平滑曲线为拟合的二次曲线, W 的单位为波长(λ), 而且当 $W = 0$ 时 $\beta = 1$, 即

$$\beta_k = A_{2k} W^2 + A_{1k} W + 1 \quad (4)$$

由于整体倾斜不影响远场光斑的形状及强度, 所以只计算了第 3 项到第 20 项 Zernike 模式的远场光斑, 其中 A_2, A_1 与 Zernike 模式阶数 k 的对应关系如表 1 所示。

表 1 各阶 Zernike 系数对应 β 的拟合系数

Table 1 Fitting coefficients of β with different Zernike orders

Zernike order k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A_2	5.5552	4.5342	5.2791	9.4937	9.6852	7.229	7.2288	18.813	10.421
A_1	7.8387	4.8992	4.5324	10.237	10.188	7.8498	7.8499	15.661	16.308
Zernike order k	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A_2	31.775	9.8667	9.5057	35.9	36.521	48.558	48.558	16.017	16.02
A_1	12.166	11.005	10.929	14.317	14.264	12.848	12.848	12.865	12.865

我们发现, 不同的 Zernike 模式拟合的 β 与 W 的曲线具有不同的表达式, 其原因是各阶模式的空间频率不同造成的光斑弥散也是不一样的。因此, 一束光或一个光学系统中, 各种类型

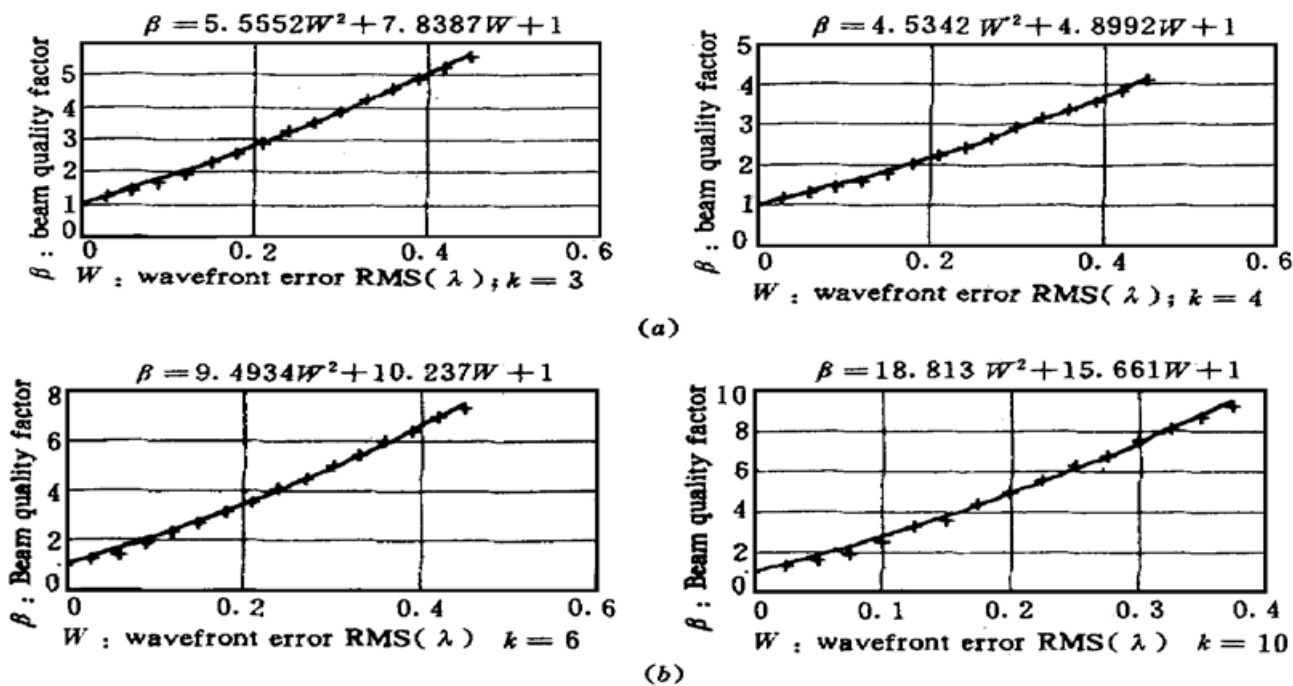


图 1 (a) 离焦($k = 3$)、像散($k = 4$) 的光束质量因子 β 与波像差的关系;
 (b) 彗差($k = 6$)、球差($k = 10$) 的光束质量因子 β 与波像差的关系

Fig. 1 (a) The relationship of beam quality factor β with defocus ($k = 3$) and astigmatism ($k = 4$) aberration;
 (b) The relationship of beam quality factor β with coma ($k = 6$) and spherical ($k = 10$) aberration

的像差所占的比例不同, 则一种合理的推论是其波前像差与光束质量因子 β 的关系为上述各项的加权和, 即

$$\beta = \left[\sum_{k=1}^n A_{2k} q_k \right] W^2 + \left[\sum_{k=1}^n A_{1k} q_k \right] W + 1 \tag{5}$$

其中
$$\sum_{k=1}^n q_k = 1 \tag{6}$$

q_k 为第 k 阶 Zernike 模式的权重。对于一组随机量, 若第 k 阶 Zernike 模式的方差为 σ_k^2 , 则这一阶带来的权重为

$$q_k = \sigma_k^2 / \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \tag{7}$$

根据式(5), 计算了大气扰动对光束质量的影响关系。大气扰动造成的随机波前相位畸变, 其 Zernike 模式系数的方差分布符合 Kolmogoroff 谱的规律, 即各阶 Zernike 系数的方差满足表 2 的分布^[5]。

大气扰动造成的波前相位畸变, 在包含整体倾斜时, 波前相位方差为

$$W^2 = 1.0299(D/r_0)^{5/3} \quad (\text{rad}^2) \tag{8}$$

去掉整体倾斜时, 波前相位方差为

$$W^2 = 0.134(D/r_0)^{5/3} \quad (\text{rad}^2) \tag{9}$$

其中 D 为光瞳面的口径, r_0 为相干长度。

可见, 大气湍流造成的波前相位畸变的主要成份是整体倾斜, 而整体倾斜只改变光斑的位置, 不改变光斑的形状。所以, 在我们的模拟计算中不考虑整体倾斜, 此时符合 Kolmogoroff 谱的光束质量因子与波像差的拟合式为

$$\beta = 8.814W^2 + 7.742W + 1 \tag{10}$$

表 2 符合 Kolmogoroff 谱的大气扰动带来的各阶 Zernike 系数方差

Table 2 Variance of different Zernike orders of Kolmogoroff atmospheric turbulence

Zernike order	Variance (rad ²)	Zernike order	Variance (rad ²)	Zernike order	Variance (rad ²)
1	0.4479(D/r ₀) ^{5/3}	8	0.0062(D/r ₀) ^{5/3}	15	0.0012(D/r ₀) ^{5/3}
2	0.448(D/r ₀) ^{5/3}	9	0.0062(D/r ₀) ^{5/3}	16	0.0012(D/r ₀) ^{5/3}
3	0.023(D/r ₀) ^{5/3}	10	0.0024(D/r ₀) ^{5/3}	17	0.0012(D/r ₀) ^{5/3}
4	0.023(D/r ₀) ^{5/3}	11	0.0024(D/r ₀) ^{5/3}	18	0.0011(D/r ₀) ^{5/3}
5	0.0232(D/r ₀) ^{5/3}	12	0.0024(D/r ₀) ^{5/3}	19	0.0012(D/r ₀) ^{5/3}
6	0.0061(D/r ₀) ^{5/3}	13	0.0024(D/r ₀) ^{5/3}	20	0.0012(D/r ₀) ^{5/3}
7	0.0062(D/r ₀) ^{5/3}	14	0.0024(D/r ₀) ^{5/3}	21	-

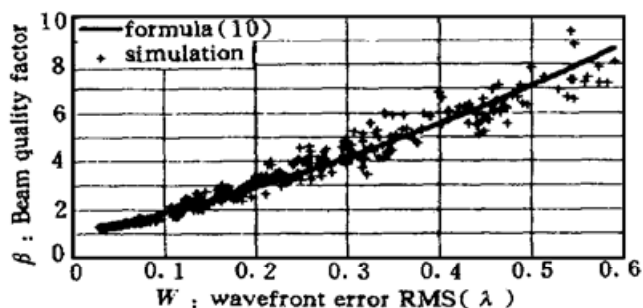


图 2 Kolmogoroff 扰动后的光束质量 β 与波像差 W 的关系

Fig. 2 Relationship of the beam quality factor β with the wavefront error W of Kolmogoroff turbulence

按表 2 的方差分布产生了一组随机波前的 Zernike 系数, 其中倾斜项为 0, Zernike 模式系数从 3 到 20, 用 FFT 计算远场光强, 结果如图 2。其中十字线表示随机波前的波像差和此时的光束质量, 曲线是按(10)式计算所得。

可以看出, 散点和曲线吻合得相当好, 证明用(5)式表示的加权和的推论可以用来近似计算各个 Zernike 项组合后产生的波像差与 β 的关系。

将(9)式代入(10)式, 并将相位角度 rad 换算成波长 λ 得

$$\beta = 0.0299(D/r_0)^{5/3} + 0.451(D/r_0)^{5/6} + 1 \tag{11}$$

(10) 式和(11) 式就是所求的大气湍流造成的波像差 W 和光束质量 β 以及 D/r_0 与 β 的关系式。

同时, 还得到了 Strehl 比。Strehl 比的表示有两种, 一种是峰值 Strehl 比 S_{peak} , 在小像差 ($W < 0.1\lambda$) 时其近似值为^[4]

$$S_{\text{peak}} = \exp(-\sigma^2) \tag{12}$$

其中 σ^2 为波面的均方值, 单位是相位弧度的平方(rad²), 所以 W 与 σ^2 的关系是 $\sigma^2 = (2\pi W)^2$; 另一种是环围能量 Strehl 比 S_{encircle} , 目前还未见其近似值的报道。图 3(a), (b) 中的十字线分别

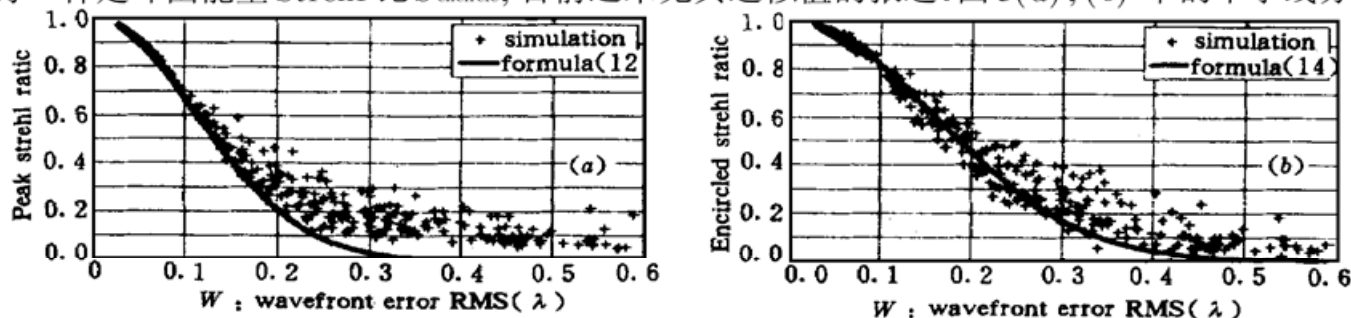


图 3 峰值 Strehl 比 (a) 及环围能量 Strehl 比 (b) 与波前误差的关系

Fig. 3 The relationship of the peak Strehl ratio (a) and the encircled Strehl ratio (b) vs wavefront aberration

为用 FFT 计算的峰值 Strehl 比和环围 Strehl 比。

可以看出, 对于大气扰动造成的 Strehl 比变化, 小像差时的峰值 Strehl 比大约为 $S_{\text{peak}} = \exp(-\sigma^2)$ (图 3(a) 曲线), 大像差时的峰值 Strehl 比则大于 $\exp(-\sigma^2)$, 但是比较弥散, 拟合的最佳曲线为

$$S_{\text{peak}} = 0.0366W^{-1.3129} \quad (13)$$

如图 4 所示。而环围能量 Strehl 比的近似值约为

$$S_{\text{encircle}} = \exp(-\sigma^2/2) \quad (14)$$

如图 3(b) 曲线。

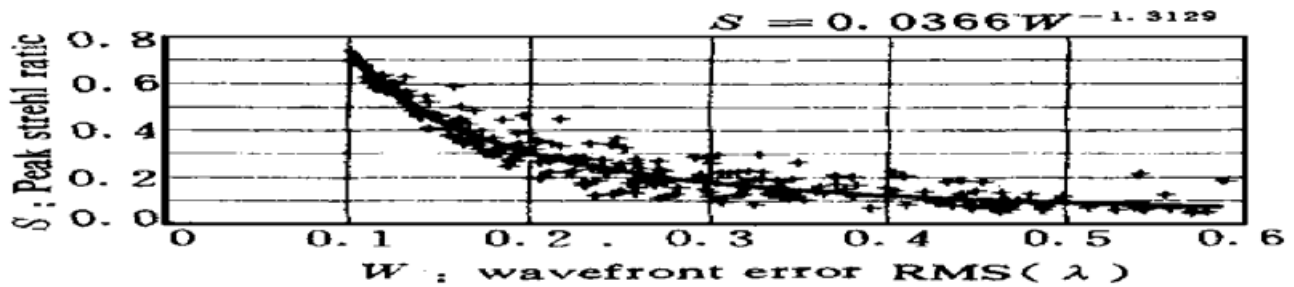


图 4 大像差时峰值 Strehl 比与拟合曲线

Fig. 4 Fitting curve of the Strehl ratio of large wavefront error

参 考 文 献

- 1 Jiang Shaoen, Sun Jinwen. The effect of light beam quality β factor on thermal blooming. *Opto-electronic Engineering* (光电工程), 1993, **20**(3): 1~ 5 (in Chinese)
- 2 V. N. Mahajan. Strehl ratio for primary aberration: some analytical results for circular and annular pupils. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(9): 1258~ 1266
- 3 Zhao Dazun, Zhou Renzhong. A step-by-step model for active telescope systems. *Proc. SPIE*, 1989, **1114**: 84~ 91
- 4 Zhou Renzhong, Yan Jixiang, Yu Xin. *Adaptive Optics*. Beijing: Defense Industry Press, 1996. 160~ 181 (in Chinese)
- 5 Robert J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, **66**(3): 207~ 211

The Relation between Wavefront Aberration and the Beam Quality Factor

Xian Hao Jiang Wenhan

(Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209)

Abstract The relation among RMS errors of wavefront, beam quality factor β and Strehl ratio is interesting in an optical system and the laser beam quality analysis. In this paper, this relation is researched, and the optimal formula is established by using numerical analysis. As an example, the relation between r_0 and β is given under the Kolmogoroff atmospheric turbulence model.

Key words adaptive optics, wavefront error, beam quality, beam transmission