第 26 卷 第 5 期
1999 年 5 月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A26, No. 5
May, 1999

一种计算缩减级型广义洗牌网络平均跳距的算法

张 杰 申云峰 顾畹仪 李国瑞 徐大雄

(北京邮电大学电信工程学院 北京 100876)

提要 简单介绍了广义洗牌网络(GSN)的结构和分类,着重分析缩减级型 GSN 的平均跳距性能,并提出一种计算平均跳距的算法。

关键词 广义洗牌网络,波分复用多跳网络,平均跳距

1 引 言

为适应未来宽带、高速通信业务的要求,充分发挥现有光纤传输网的巨大潜能,波分复用方式的多跳网络结构成为构造未来全光网的一种理想方案。

广义洗牌网络(GSN)具有正则的互连结构和十分理想的拓扑性能,可以用作下一代波分复用光波网络的逻辑拓扑。作为一种多跳方式的网络,研究 GSN 的平均跳距性能有着重要的理论意义和实用价值。

2 GSN 的结构和分类

GSN 代表了一族可以对任意数目的节点实现洗牌交换连接的正则多跳网络结构[1],包括经典洗牌网络[2]和 de Bruijn 图[3]。一个用 (k, n, p) 表示的 GSN 包括 $N = kn$ 个度值为 p 的节点,它们线性排列成一个 $k(k \geqslant 1)$ 列 $n(n \geqslant 1)$ 行的结构。相邻两列的节点通过有向链路按照完善洗牌方式连接。最后一列以柱面方式绕回与起始列重叠。GSN 的广义性在于取消了对节点数目的限制。对任意数目节点至少存在两种可能的 GSN 结构,分别对应 $k = 1$ 或 $n = 1$ 情况。

根据参数 k 与 n 的关系,任意结构的 GSN 都可以归结为两种类型:如果 $n \leqslant p^k$ 称为附加级型(extra-stage)洗牌网络;如果 $n > p^k$ 称为缩减级型(reduced-stage)洗牌网络。经典洗牌网络属于附加级型洗牌网络;de Bruijn 图则是典型的缩减级型洗牌网络。

3 缩减级型 GSN 的平均跳距性能分析

在多跳网络中,从源节点到目的节点的跳距是指连接两点之间的最短路径的长度。如果在

* 863 计划和原邮电部重点项目资助课题。

收稿日期: 1997-11-28; 收到修改稿日期: 1998-04-13

网络范围内任意选择源节点和目的节点,得到的跳距期望值即为网络的平均跳距。平均跳距是分析多跳网络的一项重要性能。

在附加级型洗牌网络中,如果从某一点出发考察由每一跳时实际访问的节点数目构成的树形结构,那么网络满足各向同性,即以任意节点作为源节点得到的访问生成树是完全相同的。因此,可以计算在经历任意跳后实际访问的节点数目,并得出平均跳距的具体计算公式[4]。

在缩减级型洗牌网络中,不同的源节点在经历相同跳时遇到的中间节点数目可能各不相同,即网络各点的生成树是不一致的。因此,缩减级型洗牌网络的性能分析变得十分复杂。作者引入数学模型—“赛车”模型—描述节点的访问过程,并在该模型的基础上提出求解缩减级型洗牌网络平均跳距的算法。

3.1 数学模型

假设有甲、乙两辆赛车沿长度为 L 的环形跑道进行比赛,车速分别为 $v_i, v_j (v_i < v_j)$,并且比赛总共进行 L 秒。讨论如下两个问题:

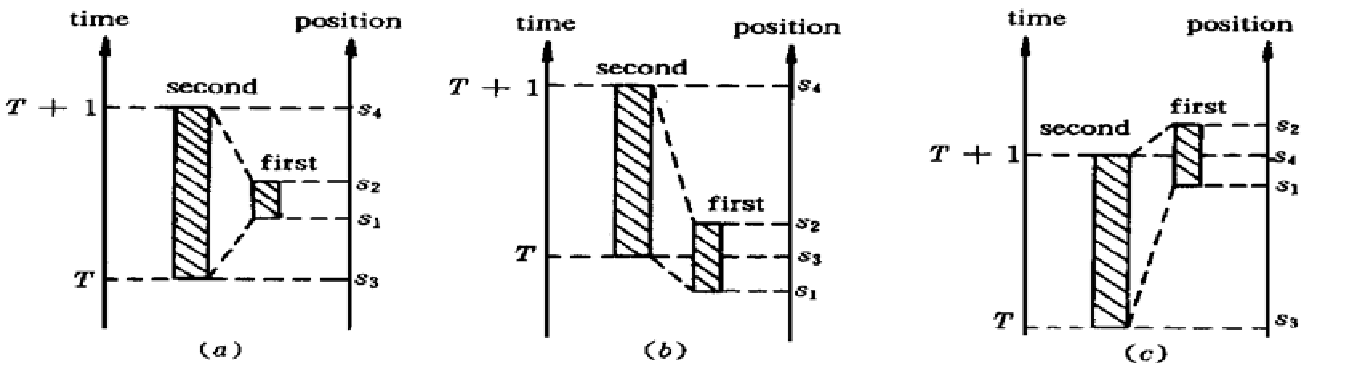

图 1 任意一秒内两车行驶路段的重叠情况

(a) 完全重叠方式; (b) 重叠方式Ⅰ; (c) 重叠方式Ⅱ

Fig. 1 The overlap possibility by two racing cars in a random second

(a) completely overlapped mode; (b) overlap mode Ⅰ; (c) overlap mode Ⅱ

3.1.1 任意一秒内两车行驶的路段发生重叠的长度

图 1 给出了比赛过程中任意一秒 T 内两车行驶的路段发生重叠的所有可能情况。图中 s_1 和 s_2, s_3 和 s_4 分别代表 T 秒前、后时刻甲、乙两车在跑道上所处的实际位置,斜线部分表示第 T 秒内两车各自行驶的路段。定义 $\mathrm{d}(s_x, s_y)(x = 1, 2, 3, 4; y = 1, 2, 3, 4)$ 表示沿赛车行驶方向由位置 s_x 到 s_y 的距离。它应当满足

$$\mathrm{d}(s_x, s_y) + d(s_y, s_x) = L \qquad 0 \leqslant \mathrm{d}(s_x, x_y) \leqslant L \tag{1}$$

设变量 u 表示由位置 s_1 到 s_3 的距离,即 T 时刻甲、乙两车沿行驶方向相距的路程。

$$u = \mathrm{d}(s_1, s_3) = (v_j - v_i) \cdot T \pmod L \tag{2}$$

以 u 为变量,根据图 1 可以计算各种重叠情况下的重叠长度为

$$W(T) = \begin{cases} v_i - u & 0 < u < v_i & (\text{第Ⅰ类部分重叠方式}) \\ v_i & L - (v_j - v_i) \leqslant u \leqslant L & (\text{完全重叠方式}) \\ v_j + u - L & L - v_j < u < L - (v_j - v_i) & (\text{第Ⅱ类部分重叠方式}) \\ 0 & \text{其他} & \end{cases} \tag{3}$$

3.1.2 整个赛程中以秒为单位两车行驶的路段发生重叠的长度

甲、乙两车在比赛过程中相遇的条件是从比赛开始到相遇时刻 t 两车行驶的路程差是跑

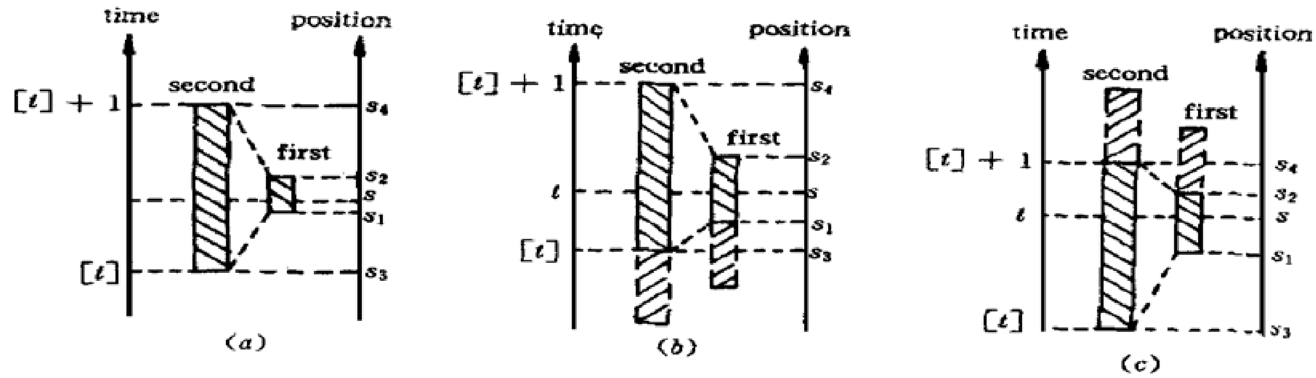

图 2　比赛过程中甲、乙两车行驶路段发生重叠的三种情况

Fig. 2　Three overlap states occurred when any two cars race during the course of the match

(*a*) $\mathrm{d}(s_3, s_1) > v_i$, $\mathrm{d}(s_2, s_4) > v_i$; (*b*) $\mathrm{d}(s_3, s_1) \leqslant v_i$; (*c*) $\mathrm{d}(s_2, s_4) \leqslant v_i$

道长度的整数倍, 即满足(4) 式。由于 $0 \leqslant t \leqslant L$, 所以式中 r 的取值为 $0, 1, 2, \cdots, (v_j - v_i)$。图 2 给出了比赛过程中两车行驶的路段发生重叠的所有可能情况。其中 s_1, s_2 分别表示$[t]$ 和$[t] + 1$ 时刻甲车在跑道上所处的位置; s_3, s_4 分别表示$[t]$ 和$[t] + 1$ 时刻乙车在跑道上所处的位置; s 表示两车相遇时的位置。这里, $[t]$ 指不大于 t 的最大整数, 图中斜线部分表示两车在相遇时刻所在秒内行驶的路程; 虚框斜线部分表示在相遇时刻前一秒内(对应图 2(*b*)) 或相遇时刻后一秒内(对应图 2(*c*)) 两车行驶的路程。由于乙的车速快于甲, 两车在相遇时刻所在秒($[t], [t] + 1$) 内行驶的路段发生完全重叠; 在相遇的前一秒($[t] - 1, [t]$) 内可能发生第一类部分重叠; 在相遇的后一秒($[t], [t] + 2$) 内可能发生第二类部分重叠。由图 2 可知不同情况下重叠长度的计算见(5) 式。

相遇条件为　$(v_j - v_i) \cdot t = rL \qquad r = 0, 1, \cdots, (v_j - v_i) \qquad 0 \leqslant t \leqslant L$　　(4)

重叠长度为

$$W([t], [t] + 1) = \mathrm{d}(s_1, s_2) = v_i \qquad t \neq L$$

$$W([t] - 1, [t]) = \begin{cases} v_i - \mathrm{d}(s_3, s_1) = v_i - (v_j - v_i)(t - [t]) & 0 \leqslant t - [t] < \dfrac{v_i}{v_j - v_i} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

$$W([t] + 1, [t] + 2) = \begin{cases} v_i - \mathrm{d}(s_2, s_4) = v_i - (v_j - v_i)([t] + 1 - t) & 0 \leqslant [t] + 1 - t < \dfrac{v_i}{v_j - v_i} \quad t \neq L \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \tag{5}$$

3.2　平均跳距算法

已知一缩减级型 GSN(k, n, p), 规定源节点列是网络的第 0 列, 则从源节点出发在 $c, c + k, c + 2k, \cdots, c + mk$ 跳时访问的是同一列 c, 其中 $m = [(\log_p n - c)/k]$。假设在第 h 跳时访问的平均节点数目用 $M(h)$ 表示, 根据 GSN 的结构可以得到平均跳距 E 的计算公式如下

$$\overline{E} = \frac{1}{kn - 1} \sum_{c=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m} [(c + ik) \cdot M(c + ik)] \tag{6}$$

由上式可知求解 GSN 平均跳距的关键是确定在经历任意跳后从源节点列上各点发出的分组

实际访问的平均节点数目。

首先,建立如下由 $m+1$ 辆赛车构成的"赛车"模型,每辆赛车代表GSN 中对第 c 列节点的一次访问。模型中跑道长度 L 等于 n, n 即为 GSN 每列的节点数。前 m 辆车车速分别为 $v_i = p^{c+ik}$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$, 第 m 辆车速数值等于 n。视第 $i(i = 0, 1, \cdots, m)$ 辆赛车在第 $j(j = 0, 1, \cdots, n)$ 秒行驶的路段代表GSN 中源节点 j 发出的分组在经历 $c+ik$ 跳后直接访问的节点集合,则 $M(c+ik)$ 对应"赛车"模型中第 i 辆车以秒为单位行驶的路段不与前 i 辆车在相应时间内的行驶路程发生重叠的平均长度。用公式可以表示为(7) 式。其中 $(i)_j$ 表示第 j 秒时第 i 辆赛车行驶的路段对应的集合, $\cup$ 符号表示集合的并集运算, $\cap$ 符号表示集合的交集运算,绝对值符号表示集合的数值,即路段的长度

$$M(c+ik) = v_i - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left|(i)_j \cap \left[\bigcup_{e=0}^{i-1}(e)_j\right]\right| \qquad i = 0, 1, \cdots, m \tag{7}$$

为了方便计算 $M(c+ik)$, 可以将(7) 式进一步改造为

$$\begin{cases} M(c+ik) = v_i - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{e=0}^{i-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|(i)_j \cap (e)_j - (i)_j \cap (e)_j \cap \left[\bigcup_{f=e+1}^{i-1}(f)_j\right]\right| \\ \qquad\qquad i = 0, 1, \cdots, (m-1) \\ M(c+mk) = n - \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} M(c+ik) \end{cases} \tag{8}$$

由公式(8), 可以建立求解 $M(c+ik)$ 的一般算法,将结果代入式(6) 即得到 GSN 的平均跳距。附录给出了利用"赛车"模型求解缩减级型洗牌网络平均跳距值的算法流程。

4 仿真计算

表 1 列出一组不同结构的GSN 平均跳距的仿真计算数据。由于尚未找到求解任意形式的GSN 平均跳距的闭合的计算公式,一些文章在试验结果的基础上给出经验性的结论[1]: 一般地,对满足 $p = 2$ 且节点总数为偶数的 GSN, 当 $k = 2$ 时平均跳距最小; 满足 $p = 2$ 且节点总数为奇数的 GSN, 当 $k = 1$ 时平均跳距最小; 当 $p \geq 3$ 时,总有 $k = 1$ 时 GSN 的平均跳距最小。作者利用本文提出的算法对大量 GSN 的平均跳距进行了计算,结果表明除个别的反例外,上述结论适用于大多数的情况。表 1 给出了一个反例,即当节点总数等于 144 并且节点度为 3 时,计算数据显示当 $k = 2$ 时而不是 $k = 1$ 时平均跳距最小。

表 1 不同结构的广义洗牌网实例的平均跳距

Table 1 Average hop distance for different GSN instances

number of nodes (N)	nodal degree (p)	column (k)	average hop distance	number of nodes (N)	nodal degree (p)	column (k)	average hop distance
525	2	1	7.453	144	3	1	4.003
		3	7.464			2	3.947
		5	7.791			3	4.187*
1024	2	1	8.377	186	3	1	4.156
		2	8.297			2	4.175
		4	8.474			3	4.369
		8	9.517*			6	5.238*

Note: The items marked with * belong to extra-stage shuffle networks; others belong to reduced-stage shuffle networks.

参 考 文 献

1　J. Iness, S. Banerjee, B. Mukherjee. GEMNET: A generalized shuffle-exchange-based, regular, scaleable, modular, multihop, WDM lightwave network. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 1995, **3**(4): 470~476

2　M. G. Hluchyj, M. J. Karol. ShuffleNet: An application of generalized perfect shuffles to multihop lightwave networks. in *Proc. INFOCOM'88*, 1988. 4B.4.1~4B.4.5

3　K. Sivarajan, R. Ramaswami. Multihop lightwave networks based on de Bruijn graphs. in *Proc. INFOCOM'91*, Apr. 1991. 1001~1011

4　S. W. Seo, P. R. Prucnal, H. Kobayashi. Generalized multihop shuffle networks. *IEEE Trans. Commun.*, 1996, **44**(9): 1205~1211

An Algorithm for Computing the Average Hop Distance of Ruduced-stage Shuffle Networks

Zhang Jie　Shen Yunfeng　Gu Wanyi　Li Guorui　Xu Daxiong

(*College of Telecommunication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing* 100876)

Abstract　GSN is a generalization of shuffle-exchange networks and it can represent a family of network structures (including ShuffleNet & de Bruijn graph) for an arbitrary number of nodes. GSN employs a regular interconnection graph with highly desirable properties and it can serve as a logical (virtual), multihop topology for constructing the next generation of lightwave networks using wavelength-division multiplexing (WDM). GSN can be divided into two classes: extra-stage and reduced-stage. The architecture of the GSN is introduced briefly. Then, the performance of the GSN is analyzed. At last an algorithm for computing the average hop distance for the reduced-stage GSN is proposed in this paper.

Key words　generalized shuffle-exchange networks, multihop networks with wavelength-division multiplexing, average hop distance

附录　一种计算缩减级型洗牌网络平均跳距的算法

BEGIN

STEP1:　For every column c in GEMNET and every hop $c+jk$
　　where $0 \leqslant c \leqslant k-1$ and $0 \leqslant j \leqslant m$ ($m=[(\log_p n-c)/k]$)
　　If $j=0$ then $M(c)=p^c$
　　If $0<j<m$ then $M(c+jk)$ is calculated in the subroutine
　　If $j=m$ then
　　　set $M(c+mk)=p^{c+mk}$
　　　for $i=0$ to $m-1$ do $M(c+mk)=M(c+mk)-M(c+ik)$

STEP2:　Set $sum=0$
　　For every c and every j do $sum=sum+(c+jk)*M(c+jk)$

the mean hop distance $\overline{E} = sum/(kn - 1)$

END

SUBROUTINE

BEGIN

set $total = 0$; $v_2 = p^{c+jk}$

for $i = 0$ to $j - 1$

Set $v_0 = p^{c+ik}$

for every $t = [rn/(v_2 - v_0)]$ where $0 \leqslant r \leqslant v_2 - v_0$

according to equation (6)

Set $before = W(t - 1, t)$; $now = W(t, t + 1)$; $after = W(t + 1, t + 2)$

for $u = i + 1$ to $j - 1$

Set $v_1 = p^{c+uk}$

In the second $(t - 1, t)$ set $s = (v_1 - v_0) * (t - 1) \bmod n$

According to equation (4) calculate $Y(t - 1)$ then modify 'before'

In the second $(t, t + 1)$ set $s = (v_1 - v_0) * t \bmod n$

According to equation (4) calculate $Y(t)$ then modify 'now'

In the second $(t + 1, t + 2)$ set $s = (v_1 - v_0) * (t + 1) \bmod n$

According to equation (4) calculate $Y(t + 1)$ then modify 'after'

$total = total + before + now + after$

$M(c + jk) = v_2 - total/n$

END