

激光雕刻的数学模型 及最优化激光雕刻方法研究

刘晓东 汪盛烈 何云贵 李适民

(华中理工大学激光工程研究院 武汉 430074)

提要 建立了一种激光雕刻的图形学数学模型,在此基础上,提出了最优化激光雕刻方法的理论与算法。该算法经过实践检验,具有良好效果。

关键词 激光雕刻, 计算机图形学, 最优化方法

1 引 言

近年来,随着计算机图形学在激光加工领域的交叉渗透,大大扩展了激光雕刻的应用范围,使其在印章刻字、美术装璜、标记标牌等行业中得到了广泛的应用。

传统的激光雕刻方式是一种模仿打印输出设备的扫描式雕刻法。由于光笔每扫描完一行,要关断并空走至另一行起始,无效空走距离长,光笔开关次数多,是一种低效率的激光雕刻方法。笔者曾在文献[1]中提出一种分块式激光雕刻方法,又在文献[2]中提出一种基于边缘围线追踪的优化方法,均在实践中取得了良好效果。

本文将在建立激光雕刻数学模型的基础上,提出更一般意义上的最优化激光雕刻方法。

2 激光雕刻的效率分析

由于激光雕刻机的光笔只有一只,光笔的一次开启行进关闭操作在工件上留下一条线轨迹;而在两条不连接的线轨迹之间,光笔将执行关断空行进开启的操作。光笔的空行进,并没有带来实际的雕刻效果,而且光笔的频繁开启与关闭,不仅缩短激光管的寿命,还影响雕刻质量。这样,在一次雕刻过程中光笔关断的次数就是衡量激光雕刻效率高低的标志。

如图 1 所示,假设要在一个方形工件上留下一个阴影区域部分,而其余部分为需要雕刻掉的部分,在图中用带箭头的直线段表示光笔的行进轨迹。在传统的直线扫描式方法中,行进轨迹如图 1(a) 所示,可以看到,光笔在行进至阴影区域时,将被区域分隔成间断的行进轨迹,间断的次数与区域的形状和扫描的间隔有关,这样,光笔将多次被关断。但是,如果用图 1(b) 所示的雕刻行进轨迹,光笔将只走两条连续折线,在整个雕刻过程中只关断一次,且仅从 A 至 B 为空行进。如果设计更为精巧一点,对于图 1 的雕刻完全可以做到“一笔画”,如图 1(c) 所示。这里实际上是将两条连续折线设法连了起来,不过为了不至于有重复轨迹,需要将 AB 这段边界

稍稍左移一些。

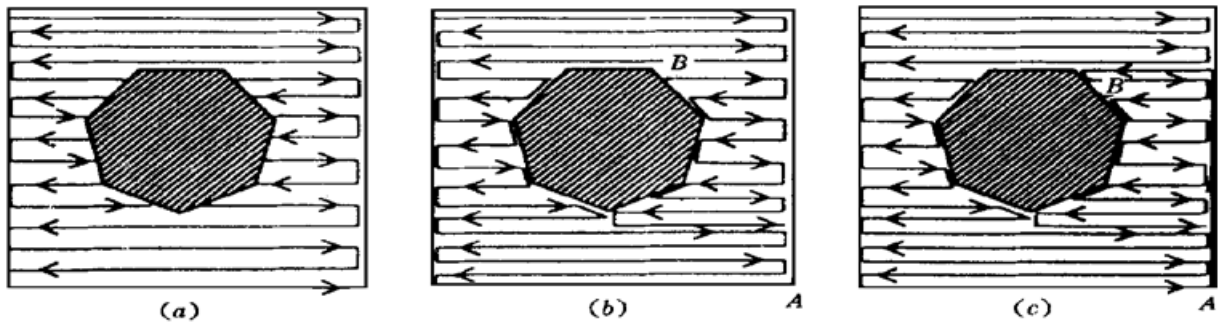


图 1 不同激光雕刻方法的行进轨迹

Fig. 1 The tracks of laser carving using different methods

可见,激光雕刻的效率与光笔的行进轨迹有直接关系,如何利用图形的连通性以最少的光笔关断次数来完成雕刻是我们将讨论的问题的核心。

3 激光雕刻的区域曲线覆盖模型

区域是指平面上点的集合。为了方便起见,以下所讨论的各区域均指非退化情形,即区域有不为 0 的面积,而没有退化成点或线。

定义 1: 区域内任意两点间都能用一条区域内曲线相连的区域称为连通区域。

定义 2: 围成连通区域边界的封闭曲线称之为环或边界环^[3]。

定义 3: 平面上一点 D 到平面曲线 L 的距离是指点 D 到曲线 L 上所有点的距离的最小值,记为 $d(D, L)$ 。

定义 4: 对正常数 δ 和连通区域 S , 若存在 S 内的一曲线族 $\bigcup_{i=1}^n L_i$, 满足条件: 对于 $0 < i \leq n$, L_i 不自交, 并且对于 $0 < i, j \leq n, i \neq j, L_i \cap L_j = \emptyset$. 使得对于 S 内的任意点 D , 都存在 $L_i (0 < i \leq n)$, 使 $d(D, L_i) < \delta$, 则称 $\bigcup_{i=1}^n L_i$ 为 S 的一个 δ 覆盖, 称 n 为覆盖的优化当量。

定义 5: 对于连通区域 S , 若存在优化当量为 1 的覆盖, 称此覆盖为优化覆盖, 对应曲线为优化曲线。

定义 6: 对于某连通区域 S , 若联结区域内任意两点间的线段仍在此区域内, 则称 S 为凸区域。

定义 7: 对于某连通区域 S , 若任意水平直线穿越 S 时, 于其边界环的有效交点数不超过两个, 则称 S 为单调区域(对于边界环上有水平线段与水平直线重合的情况, 只计水平直线进入区域的入点和穿出区域的出点为有效交点, 例如在图 2 中只计 A, B, C, D 点)。显然, 凸区域是一种特殊的单调区域。

定理 1: 对于任意单调区域 S 和任意正数 δ , 必存在 S 的 δ 优化覆盖。

证明: 如图 3 所示, 对单调区域 S , 不失一般性, 设其上下两端点为 A, B . 由 A 至 B , 作数条间距不大于 δ 的水平直线穿越 S 并使之盖住整个 S 区域。根据定义 7, 任一条水平直线与 S 的边界环相交有两个有效交点(仅有一个交点时可视为两个交点重合)。于是可按图中箭头所示形成一条由 A 到 B 的曲线 L . L 由水平直线在区域内的线段部分及部分边界环形成, L 不自交,

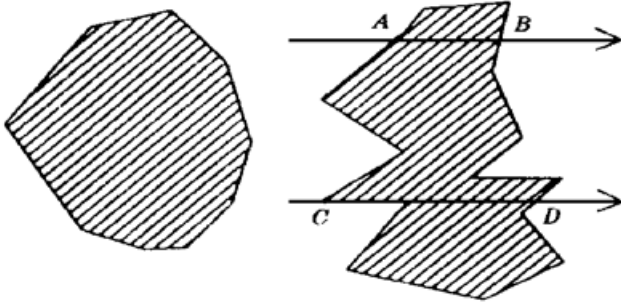


图 2 凸区域和单调区域及其水平直线穿越

Fig. 2 Convex domain and horizontal lines cutting across the monotonic domain

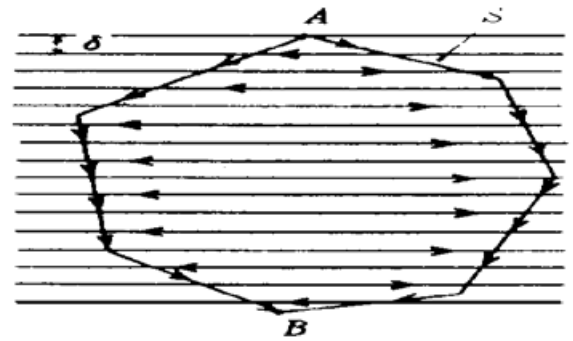


图 3 单调区域的优化覆盖

Fig. 3 The optimal cover of a monotonic domain

且 L 包含于 S , 并且由于水平直线间距不大于 δ , 故对于 S 中的任意点 D , 有 $d(D, L) \leq \delta$. 由此可见, L 即为 S 的一条优化曲线。定理得证。

定理 2: 若凸区域 S 为非退化情形, 则存在由 S 边界任一点起始, 并终止于 S 边界任一点的优化曲线。

证明: 如图 4 所示, 对于凸区域 S , 设其上下两端点为 A, B . 不失一般性, 在边界环上取一点 C , 令其为起始点; 在边界环上取一点 D , 令其为终止点。把边界环上的曲线段 AC 向 S 区域内平移一段足够小的距离 δ 形成曲线段 C_1A_1 并且 C_1 点在过 C 点的水平线上, A_1 点在过 A 点的垂直线上, 由曲线 CA, C_1A_1 及直线段 CC_1, AA_1 构成区域 S_1 . 显然 S_1 中任一点到曲线段 CA 的距离不超过 δ . 同理得到曲线段 B_1D_1 及区域 S_2 . δ 的选取还应使得 S_1 与 S_2 不相交, 由于 S 的非退化假定, 这样的曲线段总能得到。从 S 中除去 S_1 与 S_2 形成区域 S_3 为单调区域。由定理 1 知, 存在 S_3 的 δ 覆盖且优化曲线 L 为 AB . 于是, 将曲线段 CA, L 及 DB 联成的新曲线段即为区域 S 的优化曲线。定理得证。

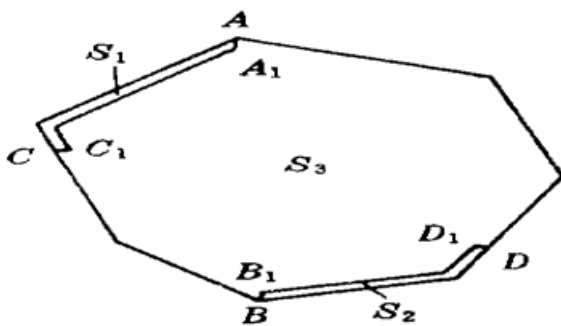


图 4 起始和终止于凸区域边界环上任意点的优化曲线
Fig. 4 The optimal curve from and to arbitrary points of the hoop of the convex domain

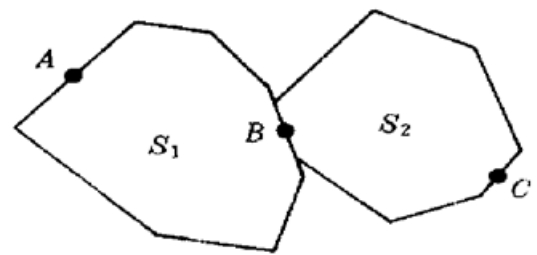


图 5 两个邻接凸区域的优化覆盖
Fig. 5 The optimal cover of two connected convex domains

推论: 若某连通区域 S 能被一条曲线 L 分解为两个凸区域, 则 S 存在优化覆盖。证明: 如图 5 所示, 设 S 被 L 分解为 S_1 和 S_2 , 在 S_1 的边界环上任取一不在 L 上的点, 令其为 A , 在 S_2 的边界环上任取一不在 L 上的点, 令其为 C ; 同时, 在 L 上取一点, 令其为 B . 由定理 2, 可知存在由 A 到 B 的 S_1 的 δ_1 优化曲线, 由 B 到 C 的 S_2 的 δ_2 优化曲线, 这样 ABC 即为 S 的 $\max(\delta_1, \delta_2)$ 优化曲线。

以上我们实际上建立了一个激光雕刻的数学模型。因为激光雕刻的数学本质,就是在一定分辨率 δ 上,找到雕刻图像各连通区域的各个 δ 覆盖,而优化激光雕刻方法就是寻求优化当量最小的覆盖,特别是,当优化当量为 1 时,可找到一个优化覆盖。

任意连通区域必可分解为有限个仅在边界处相交的凸区域的和^[4,5],而由于每一凸子区域都存在着优化覆盖,而任意两个有公共边界的凸子区域的并区域也存在着优化覆盖。这样,就将一个复杂的问题转化为一个较为简单的问题来求解。

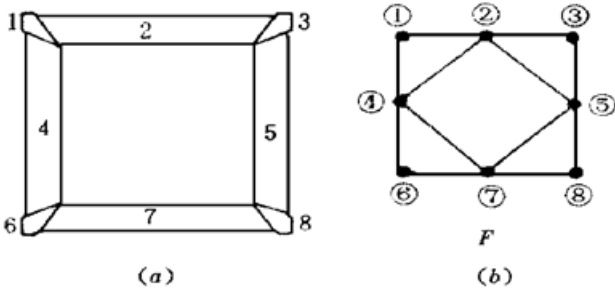


图 6 连通区域的分解及其平面图

Fig. 6 The decomposition of a connected domain and its planar diagram

例如,对于图 6 (a) 中的黑体“口”字所形成的连通区域 S ,首先将其分解为 8 个凸子区域。将每一个凸子区域用一个节点表示,而当两个凸子区域有公共边界时,用对应节点间的连线段表示这种关系。这样,连通区域 S 可表示为图 6 (b) 中的平面图 F 。

因此,对于连通区域 S 的覆盖求解问题,又转化为求图 F 的节点寻游路径问题。若存在一条经过每个节点一次且仅一次的路径,就找到了区域 S 的优化曲线,而这种路径,在图论中被称为

半哈密尔顿路径^[6]。

对于图 6 (b) F 而言,存在着半哈密尔顿路径,且不止一条,如①—②—③—⑤—⑧—⑦—⑥—④或①—②—④—⑥—⑦—⑧—⑤—③。

在数学上,搜索一个图的节点最优寻游路径有许多好的方法,如广度优先、深度优先、动态规划等等。

4 总结与实践

基于上述理论,完整的最优化激光雕刻算法如下:

- (1) 将待雕刻值图像分割为有限连通区域;
- (2) 将每一连通区域进行凸子区域分解;
- (3) 找到每一连通区域的最优寻游路径;
- (4) 对于某一寻游路径,用本文的定理和推论中提供的方法找到对应子区域的优化曲线;
- (5) 将各优化曲线输出到激光雕刻机上并完成对工件的一次雕刻。

本理论和算法均应用于笔者所编制的激光印章排版系统,并应用于华中理工大学激光工程研究院研制的 JS-A 型激光书写刻字机的实践中,取得了良好的效果。



图 7 激光雕刻的样章图

Fig. 7 The model seals of laser carving

图 7 为计算机绘制的激光雕刻模拟样章图, 表 1 为本文方法与传统方法在各种不同章型情况下的雕刻效率对比表, 可见, 采用最优化激光雕刻方法, 比传统的直线扫描式雕刻法要节省 30~ 40% 的时间。并且新方法充分利用了图形的连通性, 使光笔开关次数大大降低, 不仅延长了激光管寿命, 也使激光雕刻质量得到提高。

表 1 不同激光雕刻方法的耗时比较

Table 1 The time compare of different laser carving methods

Method	Seal model	Rectangle seal	Circle seal	Ellipse seal
Scanning line method		3 min 30 s	15 min	20 min
The optimal method		2 min 20 s	10 min 10 s	14 min 30 s

参 考 文 献

- 1 Liu Xiaodong, Li Yousheng, Hu Bing *et al.*. The study of a fast laser carving algorithm for complicated region. *Optoelectronics Laser*, 1997, **8**(5): 387~ 390
- 2 Liu Xiaodong, Hu Bing, He Yungui. A new laser carving algorithm based on region contour tracing. *Journal of Huazhong University of Science and Technology* (华中理工大学学报), 1997, **25**(11): 51~ 53 (in Chinese)
- 3 T. Pavlidis, Y. T. Liow. Intergrating region growing and edge detection. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intelligence*, 1990, **12**: 225~ 233
- 4 Xu Jianhua. *Image Processing and Analysis*. Beijing: Science Press, 1992. 165~ 180 (in Chinese)
- 5 Hu Changyuan, Zhang Fuyan. A method for decompositing complex shape into strokes. *Chin. J. CAD & CG* (计算机辅助设计与图形学学报), 1996, **8**(6): 408~ 414 (in Chinese)
- 6 Hu Meichen, Qiu Weide. *Combination and Diagram*. Beijing: People's Post and Telecommunication Press, 1986. 110~ 141 (in Chinese)

Study of a Mathematics Model and the Optimal Method of Laser Carving

Liu Xiaodong Wang Shenglie He Yungui Li Shimin

(Huazhong University of Technology and Science, Institute of Laser, Wuhan 430074)

Abstract This paper proposes a laser carving mathematics model based on computer graphics. In addition, the optimal laser carving method is given and all the algorithms are proved excellent in practice.

Key words laser carving, computer graphics, the optimal method