

# 光学小波滤波理论初探\*

马 晶<sup>1</sup> 谭立英<sup>1</sup> 冉启文<sup>2</sup>

(哈尔滨工业大学<sup>1</sup> 可调谐激光技术国家重点实验室,<sup>2</sup> 数学系 哈尔滨 150001)

**提要** 用小波理论重新分析了光学信息处理的基本理论。首先用小波理论重新分析惠更斯-菲涅耳原理,并据此提出波前滤波思想,初步奠定了小波光学的理论基础。在此理论上,根据波前滤波思想,对单缝、圆屏、光栅等衍射现象进行了分析;同时也分析了空域滤波、空频域滤波、光学成像系统。结果表明,用小波分析方法研究光学信息处理问题是完全可行的,且更符合实际情况。

**关键词** 小波分析, 光学信息处理, 滤波

## 1 引 言

小波分析是一种新的分析方法,它在各个学科领域显示了越来越强的生命力,在光学领域已经有人用光学系统实现了一些特殊形式的小波变换<sup>[1~3]</sup>。本文则侧重用小波分析来讨论光学信息处理的基本理论。首先用小波分析方法重新分析光衍射现象,提出波前滤波新思想,从而建立了一种新的光学理论,称其为小波光学。并在此基础上,先用小波分析方法对传统的几个典型光学衍射理论进行了分析;其次用小波对光学信息处理系统的空域滤波、空频域滤波、光学成像系统进行了分析。结果表明,小波分析方法适合光学信息处理系统。同时由于对实际的光学系统,信号是随机的非平稳信号,而以前的傅里叶光学理论仅适用平稳信号,且反映不出信号的局域信息。因此小波光学理论更适合实际的光学系统,这将给光学信息处理领域带来新的活力和不可估量的变化。

## 2 小波分析与波前滤波

光是电磁波,惠更斯原理认为,光波所到达的每一个点都可以看作是发射次级子波的波源,新的波前就是这些次级子波的包迹。菲涅耳在惠更斯原理的基础上,定量地给出了这种数学关系,奠定了光的衍射理论基础。若我们从另一角度来研究光的传播现象,认为光波在传播过程遇到障碍物或孔径时(当然障碍物和孔径都需很小),波阵面受到限制,受限后的传播情况可以看成此时孔径处光波在各点的权重重新分配。亦即此时孔径(或不透明屏)对光波的波阵面进行滤波。这样我们引入权重函数  $h_{a,b;c,d}(x,y)$  并选其为母小波

$$h_{a,b;c,d}(x,y) = a^{-1/2}c^{-1/2}h\left[\frac{b-x}{a}, \frac{d-y}{c}\right] \quad (1)$$

\* 哈尔滨工业大学校基金资助项目。

此时受限衍射孔径处 $(x, y)$  点的光场分布为

$$U(x, y) = \iint_{\Sigma} U_1(x, y) h_{a, b, c, d}(x, y) dx dy \tag{2}$$

其中  $U_1(x, y)$  为未受到限制的光场分布函数。此时有

$$U(x, y) = U_1(x, y) \otimes h_{a, b, c, d}(x, y) \tag{3}$$

则在观察屏上有

$$\hat{U}(p, q) = \hat{U}_1(p, q) \hat{H}(p, q) \tag{4}$$

即观察屏上某点的光场分布为受限孔径处光场分布的傅氏变换与受限孔径处权重因子的傅氏变换的乘积。

基于这种物理思想, 可将光的衍射也看成是一种滤波, 是衍射物对光波波前进行滤波, 是一种波前滤波。而由于小波的局域性, 根据此理论可对各种复杂的衍射现象进行分析, 不同的情况可选用不同的小波母函数。下面根据波前滤波思想举例说明此理论的正确性。

对单缝、圆孔、正弦型位相光栅的夫朗和费衍射<sup>[4]</sup>, 由式(4), 只要找到一种母小波, 使其在有效屏上  $\hat{H}(p, q) = 1$ , 其余部分为零, 就与实际情况完全一致。由此要求选如下形式小波<sup>[5]</sup>

$$h(x, y) = \frac{\sin 2\pi \left[ x - \frac{1}{2} \right] - \sin \pi \left[ x - \frac{1}{2} \right]}{\pi \left[ x - \frac{1}{2} \right]} \frac{\sin 2\pi \left[ y - \frac{1}{2} \right] - \sin \pi \left[ y - \frac{1}{2} \right]}{\pi \left[ y - \frac{1}{2} \right]} \tag{5}$$

其在频域中

$$\hat{H}(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{有效孔径} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6}$$

由此可以说明, 小波波前滤波理论是完全正确的, 并且此理论将为小波光学理论奠定基础。下面根据此理论分别对光学信息处理系统的空域滤波、空频域滤波情况进行分析。

### 3 空域滤波

若在输入平面  $P_1$  放置一个复透明片  $h_{a, b, c, d}(x, y)$  作为空域滤波器(如图 1), 于是在紧靠  $P_1$  平面的复光场为

$$E(x, y) = k \iint_{\Sigma} f(x, y) h_{a, b, c, d}(x, y) dx dy \tag{7}$$

这里用二维母小波  $h_{a, b, c, d}(x, y)$  来描述透明片,  $f(x, y)$  为输入光信号。这就是  $f(x, y)$  和  $h_{a, b, c, d}(x, y)$  的卷积积分。

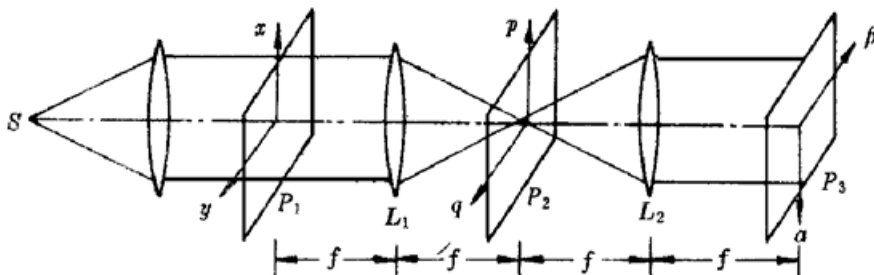


图 1 空频域滤波系统  
Fig. 1 A filtering system of spatial frequency domain

在空频域中有

$$\hat{E}(p, q) = k \hat{F}(p, q) \hat{H}(p, q) \tag{8}$$

其中  $\hat{E}(p, q), \hat{F}(p, q), \hat{H}(p, q)$  分别为  $E(x, y), f(x, y), h_{a, b, c, d}(x, y)$  的傅氏变换。

这样我们根据波前小波滤波思想用小波变换实现对光学系统的空域滤波, 并可通过改变系统的结构参数实现各种尺度下的滤波。同时由于小波变换的局域化特征, 可根据需要对任一点的局部特征进行提取。而且在设计空域滤波器时, 可在理论上根据需要对各个局部进行设计, 并通过智能化控制而使空域滤波灵活方便, 这是傅里叶变换所不能做到的。

## 4 空间频率域滤波

在空间频率域内(图 1 中的  $P_2$  面)也可以合成一个所需要的线性滤波运算, 那里的空间滤波器是由置于相干光学系统空间频率域的透明片组成。若待处理信号  $f(x, y)$  置于空域  $P_1$ , 则输入信号的傅里叶变换分布在空间频率域  $P_2$  面上。若有一透明滤波片  $h_{a,b,c,d}(p, q)$  置于  $P_2$ , 于是紧靠  $P_2$  的背后复光场分布为

$$E(p, q) = k\hat{F}(p, q) h_{a,b,c,d} \left[ \frac{b-p}{a}, \frac{d-q}{c} \right] \quad (9)$$

在输出平面  $P_3$  上的光场分布为

$$g(\alpha, \beta) = k \iint_{\Sigma} \hat{F}(p, q) h_{a,b,c,d} \left[ \frac{b-p}{a}, \frac{d-q}{c} \right] dp dq \quad (10)$$

$$\text{即} \quad g(\alpha, \beta) = k\hat{F}(p, q) \otimes h_{a,b,c,d} \left[ \frac{b-p}{a}, \frac{d-q}{c} \right] \quad (11)$$

在这里用小波母函数来表示透明滤波片, 频域小波滤波器可由任意形状的孔径和狭缝组成。根据孔径的组成, 可形成低通、高通、带通滤波器。并可根据小波的特性, 对输入信息的局部进行提取和识别, 还可根据其局部变化情况, 找出输入信号的奇异点变化情况, 而通过调整和移动滤波器可实现各种尺度下的空频域滤波, 尤其当输入光信号是非平稳信号时, 只有用小波变换才能进行滤波处理。

## 5 小波分析与光学成像系统

由光源  $\Sigma$  发出单色光,  $S(x, y)$  表示光源  $\Sigma$  上的一小面元  $ds$  在输入平面  $P_1$  上产生的光场, 输入平面  $P_1$  的透射率为  $f(x, y)$ 。则由小面元  $ds$  发出, 经过光学系统后在输出平面  $P_2$  的复光场分布为

$$g(\alpha, \beta) = \hat{S}(x, y) f(x, y) \otimes h(x, y) \quad (12)$$

这里  $h(x, y)$  为光学系统的空间脉冲响应, 用母小波来表示。 $ds$  在成像平面的辐照度为

$$dI(\alpha, \beta) = g(\alpha, \beta) g^*(\alpha, \beta) ds \quad (13)$$

整个光源形成像的辐照度为

$$I(\alpha, \beta) = \iint_{\Sigma} |g(\alpha, \beta)|^2 ds = \iint_{\Sigma} S(x, y) S^*(x, y) f(x, y) f^*(x, y) h \left[ \frac{\alpha-x}{a}, \frac{\beta-y}{b} \right] h^* \left[ \frac{\alpha-x}{a}, \frac{\beta-y}{b} \right] dx dy \quad (14)$$

若光源辐照度比较均匀

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| h \left[ \frac{\alpha-x}{a}, \frac{\beta-y}{b} \right] \right|^2 |f(x, y)|^2 dx dy \quad (15)$$

根据小波变换的性质可知, 由平移因子  $\alpha, \beta$  可确定像在各点的辐照度; 同时, 如使尺度因子  $a, b$  根据需要变化, 就可以任取某一局部来研究。

## 6 结 论

从上面讨论可以看出,用小波变换完全可以进行光学系统的信号处理等工作。这种新方法在处理光学系统的平稳信号时体现不出其优越性,但在对非平稳信号的处理中,具有傅氏变换所不能比拟的优点,这是由于在光学系统中

- 1) 小波变换不是严格要求在频域面上,可在任意面上进行滤波;
- 2) 可反映不同点处的变化情况(主要反映在尺度、中心空频域上),尤其是某点的突变性,这是傅氏变换做不到的;
- 3) 傅氏变换是一种相位置换,仅对相位有作用。而实际的光学系统不仅仅对相位有作用;
- 4) 傅氏变换反映的是平稳过程,而实际的光学信息处理过程往往是一个非平稳过程。小波变换则可处理非平稳过程、瞬时信号。

所以用小波分析方法分析光学信息处理过程不仅完全可行,而且比以往的傅里叶分析更符合实际的光学系统。该项工作为小波光学理论奠定了初步的理论基础,这将给今后的光学信息处理、光计算、光互连、光通信带来新的变化。

### 参 考 文 献

- 1 Kan Hui, Xu Jian, Zhan Yuanling *et al.*. Optical wavelet transform with photorefractive holographic matched filtering. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1996, **A23**(8): 741~ 744 (in Chinese)
- 2 Ni Ming, Jiang Zhiping, Lu Qisheng. Improvement of an optical wavelet transform. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(3): 231~ 236 (in Chinese)
- 3 Yan Xiaona, Wang Ning, Yin Yaozu *et al.*. Negative binary coding wavelet transform. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(4): 461~ 464 (in Chinese)
- 4 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics. Beijing: Science Press, 1968. 70~ 77 (in Chinese)
- 5 Y. Meyer. In ondelettes et operatears. Paris: Hermann, 1990. 30~ 36, 106~ 110

## The Elementary Theory of Optical Wavelet Filtering

Ma Jing<sup>1</sup> Tan Liying<sup>1</sup> Ran Qiwen<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>National Key Laboratory of Tunable Laser Technology, <sup>2</sup>Mathematics Department, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

**Abstract** The elementary theory of optical information processing is reanalyzed by using wavelet theory in this paper. First, wavelet theory is used to reanalyze the Huygens-Fresnel principle, then an ideal of wave-front filtering is brought forward, the foundation of wavelet optics theory is thus established preliminarily. On the base of the theory, phenomenon of optical diffraction from a single slit, round aperture, grating, and so on are analyzed according to the ideal of wave-front filtering. The filtering in spatial domain, spatial frequency domain and a system of optical formatting imagines are also analyzed. The results show that it is feasible for the method of wavelet analysis to be used to study the problems of optical information processing, and it is more accordant with practical circumstances.

**Key words** wavelet analysis, optical information processing, filtering