

分数傅里叶变换全息图及其再现像的解析性

杨 虎

(山西师范大学物理系 临汾 041004)

李万松

(四川联合大学光电系 成都 610064)

提要 将分数傅里叶变换用于全息图制作, 针对各种记录方式, 全面研究了分数傅里叶变换全息图无透镜再现像的共轭关系和放大率关系, 确切完整地给出了分数傅里叶全息术傍轴几何光学理论的数学表达和物理解释。计算机模拟实验证明了结论的可靠与可行。

关键词 傅里叶, 光学变换, 全息图, 成像

1 引 言

1993 年 Lohmann 首次把分数傅里叶变换的数学定义引入信息光学^[1], 提供了任意分数级次傅里叶变换光学实现的单透镜模式和双透镜模式, 使其很快成为信息光学的热门话题。然而在对其应用前景的研究方面^[2~6], 分数傅里叶变换全息图的有关内容尚未见系统的报道。

本文将分数傅里叶变换用于全息图制作, 针对各种记录方式, 分析了记录和再现各种因素对全息像的影响, 提供了分数傅里叶变换全息图无透镜再现过程的物像共轭关系、放大率关系, 确切完整地给出了分数傅里叶全息术傍轴几何光学理论的数学表达和物理解释。计算机模拟实验证明了结论的可靠与可行。

2 理论分析

对应于常规的傅里叶变换全息术, 分数傅里叶变换全息图是物体的任意级次分数傅里叶频谱与参考平行光波在其公共区域内进行位相比较的结果。以基元分数傅里叶全息图为例, 在图 1 所示坐标系下, 将不同记录方式获得的分数傅里叶频谱记为

$$\tilde{O}(x, y) = A_0 \exp(j\Phi) \quad (1)$$

方向角为 θ 的参考平行光记为

$$\tilde{R}(x, y) = A_R \exp(-j k x \sin\theta) \quad (2)$$

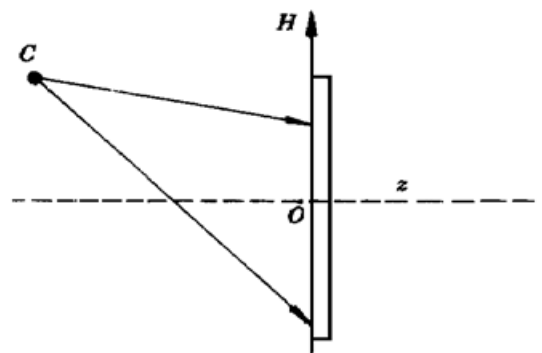


图 1 分数傅里叶变换全息图无透镜再现装置
C: 再现点源; H: 全息图

Fig. 1 Lensless reproducer of fractional Fourier transform hologram

C: source of reproducing point; H: hologram

再现光路图 1 中位于 $C(x_c, y_c, z_c)$ 的点光源在全息图平面 $H(x, y, 0)$ 的光场分布为

$$\tilde{C}(x, y) = A_c \exp\left[-jk \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{2z_c}\right] \tag{3}$$

因此, 在傍轴条件下, 包含再现像性质的 ± 1 级衍射波前相因子^[7]为

$$\varphi_{\pm 1} = -k \left[\frac{x^2 + y^2}{2z_c} - \left[\frac{x_c}{z_c} \pm \sin\theta \right] x - \frac{y_c}{z_c} y \right] \mp \varphi \tag{4}$$

其中的二次项相当于固定焦距透镜的位相变换作用, 一次项相当于固定顶角棱镜的偏向作用。因此在无透镜再现过程中, 全息图本身承担了透镜与棱镜复合而成的光学系统成像功能。

2.1 全息像与再现光源之间的共轭关系

根据波前相因子判断法, 分数傅里叶全息图无透镜再现像与再现光源之间的共轭关系为

$$1/z_i - 1/z_c = \mp 1/f_i \tag{5}$$

其中对原始像取 “-” 号, 全息图具有凹透镜成像功能; 对共轭像取 “+” 号, 全息图具有凸透镜成像功能; z_c 为再现光源相对全息图的纵向距离; z_i 为再现像相对全息图的像距; f_i 为全息图所等效的成像透镜焦距, 它的具体取值及物理含义取决于记录光路的具体选择。

2.1.1 有透镜模式

$$f_i = \begin{cases} f \sin^2 \varphi & \text{(对称式单透镜模式}^{[11])} \\ f \operatorname{tg}^2 \varphi & \text{(原物 - 菲涅耳衍射 - 透镜模式}^{[7])} \\ f \sin^2 \varphi & \text{(原物 - 透镜 - 菲涅耳衍射模式}^{[7])} \\ f \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi & \text{(双透镜模式}^{[6])} \end{cases}$$

其中 f 为记录光路中所用透镜焦距; $\varphi = p(\pi/2)$; p 为分数傅里叶变换级次, f_i 的物理意义是记录透镜对物体直接所成像面相对全息图的距离。

2.1.2 无透镜模式^[8]

$$f_i = \begin{cases} f \sin^2 \varphi \cos \varphi & \text{相应于图 2(a) 情况} \\ f \sin^2 \varphi & \text{相应于图 2(b) 情况} \end{cases}$$

其中 f 为对称式单透镜模式中的透镜焦距, f_i 的物理意义是记录光路中物面相对全息图的距离。

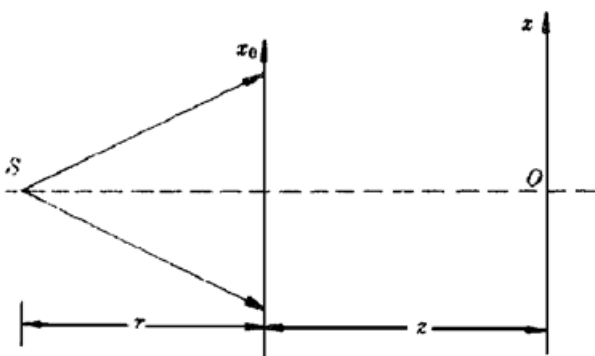


图 2 分数傅里叶变换全息图无透镜记录模式

S: 记录光源; x_0 : 物面; x : 频谱面

Fig. 2 Lensless recording mode of fractional Fourier transform hologram

(a) $r = f \cos \varphi, -z_0 = f \sin^2 \varphi \cos \varphi$

(b) $r = f(1 + \cos \varphi), -z_0 = f \sin^2 \varphi$

S: record light source; x_0 : object plane; x : frequency spectrum plane

2.2 全息像与记录物体之间的共轭关系

分数傅里叶全息图无透镜再现像与记录物体之间的共轭关系为

$$1/d_i - 1/d_0 = 1/f \tag{6}$$

其中 d_0 为记录物体相对记录透镜的距离, d_i 为再现像相对记录透镜距离, f 为记录透镜焦距。这种关系取决于再现光源的具体位置, 并与具体的记录方式有关。在单透镜模式、原物 - 菲涅

耳衍射-透镜模式和双透镜模式中, 当 $z_c \rightarrow \infty$ 时, 原始像满足(6)式; 当 $z_c = -1/2f_i$ (f_i 为各记录光路中全息图等效的成像透镜焦距) 时, 共轭像满足(6)式。在其他分数傅里叶全息图记录光路中, 不存在上述关系。

2.3 全息图的棱镜偏向功能

分数傅里叶全息图无透镜再现中的棱镜偏向功能集中表现在其 ± 1 级衍射波前相因子的一次项中, 对原始像, 全息图相当于棱角向下的棱镜; 对共轭像, 相当于棱角向上的棱镜。

应当指出, 对于离轴分数傅里叶全息图的情况, 全息图等效的偏向功能的棱镜, 其棱边与 x 轴, y 轴均不平行, 这是导致全息图作为透镜成像时主轴不垂直于全息图平面的直接原因。

2.4 全息像的放大率

2.4.1 横向放大率用以描写物像之间缩放性和正倒关系, 定义为

$$\beta_i = \frac{dx_i}{dx_0} = \frac{dy_i}{dy_0} = \begin{cases} \left[\cos^2 \varphi \mp \frac{f \sin^2 \varphi}{z_c} \right]^{-1} & (\text{对称式单透镜模式}) \\ \left[\cos^2 \varphi \pm \frac{z_0}{z_c} \right]^{-1} & (\text{原物-菲涅耳衍射-透镜模式}) \\ \left[\cos \varphi \pm \frac{z_0}{z_c} \right]^{-1} & (\text{双透镜模式}) \\ \left[1 \pm \frac{z_0}{z_c} \right]^{-1} & (\text{其他}) \end{cases}$$

其中相对原始像取上面一组符号, 对共轭像取下面一组符号; z_0 为相应于各记录光路中物面与全息图之间距离。 β_i 的物理意义与几何光学理论相一致。

2.4.2 纵向放大率用以描写物像之间深度反转性质, 定义为

$$\alpha = \frac{dz_i}{dz_0} = \begin{cases} \pm \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right] \left[1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \pm \frac{z_0}{z_c} \right]^{-2} & (\text{对称式单透镜模式}) \\ \pm \beta_i^2 \cos^2 \varphi & (\text{原物-菲涅耳衍射-透镜模式}) \\ \pm \beta_i^2 \cos \varphi & (\text{双透镜模式}) \\ \pm \beta_i^2 & (\text{其他}) \end{cases}$$

其中 β_i 为相应各记录光路的全息像横向放大率, 相对原始像 $\alpha > 0$, 物像凹凸一致, 深度不反转; 相对共轭像 $\alpha < 0$, 物像凹凸互易, 深度反转。

3 实验结果与讨论

选择透过率函数为 $\operatorname{rect}(x/0.256)$ 的物体, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $p = 1/3$, $\varphi = \pi/6$, $\theta = \pi/6$, 透镜焦距 $f = 300 \text{ mm}$, 物面采样点数 $N = 256$, 物面单位 $1 \text{ unit} = 0.002 \text{ mm}$, 观察面单位 $1 \text{ unit} = 0.0172 \text{ mm}$ 。

图 3 是物体透过率。图 4 是对称式单透镜模式所得全息图的共轭像, 其中满足共轭关系(5)式时, $z_c = -100 \text{ mm}$, $z_i = 94.8 \text{ mm}$; 满足(6)式时, $z_c = -43.3 \text{ mm}$, $d_i = -46.4 \text{ mm}$ 。

由其他光路所得全息图的再现像性质, 实验结果与理论完全吻合。

应该指出, 上述实验仅选择了一种形状简单的物体, 基于基元全息图中点物的像完全量度了整个系统的脉冲响应, 从而表征了系统的成像特征, 因此对其他形状的物体(例如不规则物体)的全息成像性质, 与全息术傍轴几何光学理论预言的结果相同。

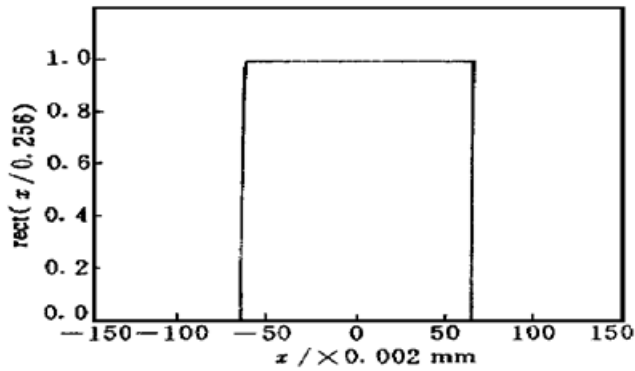


图3 物体透过率

Fig. 3 Transmissivity

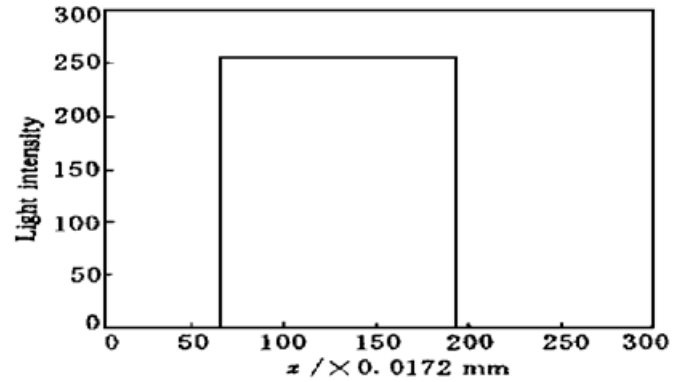


图4 再现像光强分布

Fig. 4 Light intensity dispersion of reproducing image

参 考 文 献

- 1 A. W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~ 2186
- 2 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann. Graded-index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(20): 6188~ 6193
- 3 H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic *et al.*. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(2): 547~ 559
- 4 G. Dorsch, A. W. Lohmann. Fractional Fourier transform used for a lens-design problem. *Appl. Opt.*, 1995, **34**: 411~ 412
- 5 L. M. Bernardo, O. D. D. Soares. Fractional Fourier transform and imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(10): 2622~ 2626
- 6 A. W. Lohmann, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform: photonic implementation. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(32): 7661~ 7664
- 7 Hua Jianwen, Lin Liren, Li Guoqiang. Some basic fractional Fourier transform units. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1997, **17**(8): 1040~ 1044 (in Chinese)
- 8 Hua Jianwen, Liu Liren, Li Guoqiang. Simple method to study the Fourier transform of object. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(5): 435~ 438 (in Chinese)

Fractional Fourier Transform Hologram and the Analyticity of Its Reappear Image

Yang Hu

(Department of Physics, Shanxi Normal University, Linfen 041004)

Li Wansong

(Opto-electronics Department, Sichuan Union University, Chengdu 610064)

Abstract Fractional Fourier transform is applied to produced hologram. For different recording methods, we study the conjugate relation and the magnification relation of the non-lens reappear image of the fractional Fourier transform hologram. The mathematical expression and the physical interpretation in the condition of the paraxial geometrical optics are given. Its reliability and feasibility are demonstrated by computer simulation.

Key words Fourier, optical transform, hologram, imaging