

克尔透镜锁模激光器中的色散波*

林 强

E. Wintner I. T. Sorokina

(浙江大学物理系 杭州 310028) (维也纳技术大学量子电子学与激光技术研究所, 奥地利)

提要 利用孤子微扰理论分析了克尔透镜锁模激光器中由高阶色散效应引起的色散波, 给出了色散波的频率位置、时间宽度和所包含的能量的解析表达式, 与实验结果符合得很好。此结果对于设计腔内色散, 以改善脉冲光束质量, 减少脉冲能量损失, 获取最短光脉冲具有重要意义。

关键词 克尔透镜锁模, 超短脉冲, 色散波

在克尔透镜锁模超短脉冲固体激光器中, 输出脉冲的时间宽度取决于腔内净的负群速度色散。当二阶负群速度色散很小时, 高阶群速度色散将引起色散波。色散波(DWs)是限制克尔透镜锁模激光器中最短输出光脉冲的主要因素^[1,2], 因而引起了许多研究者的兴趣^[3-5]。迄今为止, 人们的研究对象主要是三阶色散(TOD), 对四阶色散(FOD)只能用数值解^[6,7], 而对更高阶色散引起的色散波尚无研究。但是, 对 10 fs 以下的超短脉冲激光器而言, 更高阶的色散将起重要作用。

本文分析了任意阶高阶色散对克尔透镜锁模激光器的影响, 给出了色散波的解析解, 并与有关的实验结果作了比较。结果表明, 当存在 FOD 及以上色散时, 输出光谱中将出现多个非对称分布的振荡峰值, 这与仅考虑 TOD 的情况不同。本文还给出了决定振荡峰值的频率位置、时间宽度和所包含能量的简单公式。解析解预测的结果与我们及[8]的实验结果均符合得很好。

1 理论分析

推导基于描述被动锁模激光器的微分方程

$$\left[\partial_z + i \frac{\beta_2}{2} \partial_r^2 - i\Phi \right] v = i \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (i\partial_r)^m v \quad (1)$$

其中 $v(z, T)$ 为电场复振幅, z 为相对于一次往返腔长 z_r 的传输距离, T 为延迟时间。 $\beta_m = \partial^m \Phi(\omega) / \partial \omega^m |_{\omega_0}$, $m = 2, 3, \dots$, ω_0 为脉冲的载波频率, $\Phi(\omega)$ 为一次往返的位相延迟, 包括镜子和晶体的贡献。方程(1)式的左边是非线性薛定谔方程部分, 包括沿着传输光轴 z 的相移、群速度色散和自位相调制(SPM) Φ 。(1)式的右边包括所有高阶色散的微扰项。方程(1)本质上与

* 本工作得到浙江省自然科学基金会青年科技人才培养专项基金项目(RC98029)和奥地利科学基金项目(10733-PHY)的资助。

Haus 等引入的方程相同^[4], 但此处包含了所有的高阶色散项。

众所周知, 非线性薛定谔方程具有如下形式的孤子解

$$v_s(z, T) = a_0 \exp \left[-i \frac{\beta_2}{2\tau^2} z \right] \operatorname{sech} \frac{T}{\tau} \quad (2)$$

其中 a_0 为振幅, τ 为脉冲宽度。孤子解只有在群速度色散系数 β_2 为负, 且与自位相调制 ϕ 保持平衡时才能实现, 即要满足

$$\phi |a_0|^2 = -\frac{\beta_2}{\tau^2} \quad (3)$$

因此, 当高阶色散不存在时, 自位相调制与群速度色散之间的平衡使得腔内脉冲具有孤子解的形式。当存在 TOD 及以上色散时, 将产生一个叠加在孤子波之上的色散波, 在光谱中将表现为“旁带”(sideband)^[3]。

设方程(1)的解可写为

$$v(z, T) = v_s(z, T) + v_p(z, T) \quad (4)$$

其中 $v_s(z, T)$ 为由方程(2)表达的孤子波, $v_p(z, T)$ 为一个由高阶色散引起的微扰色散波, 其时间振幅、带宽和能量 $\int_{-\infty}^{\infty} v_p dT$ 均远小于孤子的相应值。另外, v_p 与 v_s 必须是位相匹配的。求解 v_p 的一种方法是通过辅助场(associate field)^[9], 但存在多个高阶色散时, 数学上是非常复杂的, 难以获得简单的解析表达式。本文将运用微扰法, 再加上一些符合实际情况的假设, 来求得 v_p 的一些重要性质。

把方程(4)代入(1), 并考虑到 v_s 本身为非线性薛定谔方程的解, 可以得到

$$\partial_z v_p + i \frac{\beta_2}{2} \partial_T^2 v_p - i \phi [2|v_s|^2 v_p + v_s^2 v_p^*] = i \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (i \partial_T)^m (v_s + v_p) \quad (5)$$

其中星号表示复共轭。对色散波 v_p 而言, (5) 是一个线性方程。把方程(5)两边进行傅里叶变换, 可以得到

$$\frac{\partial V_p(z, \omega)}{\partial z} = i D(\omega) V_p(z, \omega) + i S(\omega) + i F(\omega) \odot V_p(z, \omega) \quad (6)$$

其中 $V_p = \exp \left[\frac{i \beta_2 z}{2\tau^2} \right] F[v_p]$ 为消去与 z 有关的位相因子的变换中间变量。 ω 为相对孤子中心频率 ω_0 的角频率, F 表示傅里叶变换, \odot 表示卷积, $D(\omega)$ 为一个由下式表示的“色散函数”

$$D(\omega) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (-1)^m \omega^m + \frac{\beta_2}{2\tau^2} \quad (7)$$

$S(\omega)$ 为一个与所有高阶色散有关的“源函数”, 由下式给出

$$S(\omega) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (-1)^m \omega^m a_0 \pi \tau \operatorname{sech} \frac{\pi \tau \omega}{2} \quad (8)$$

(6) 式右边的第三项表示孤子波对色散波的一种“互位相调制”, $f(\omega)$ 为一个卷积函数, 由下式给出

$$f(\omega) = \frac{3}{4} \phi a_0^2 \tau^2 \operatorname{sech} \frac{\pi \tau \omega}{2} \odot \operatorname{sech} \frac{\pi \tau \omega}{2} \quad (9)$$

(6) 式中右边第一项是色散波相对于孤子波沿着传输距离 z 的附加相移。在稳定状态, 此相移必须为 $2\pi i$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。这样才能保持色散波与孤子波之间的位相匹配。因此, 决定色散波的共振峰值频率 ω_h 的条件为

$$D(\omega_h) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m}{m!} (-1)^m \omega_h^m + \frac{\beta_2}{2\tau^2} = 2\pi j \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

值得注意的是, 方程(10)包含了光纤中三阶色散效应产生色散波的条件, 只要设 $j = 0$ ^[3] 即可。它同时包含了周期微扰产生色散波的条件, 只要设 $j = -1$ 即可^[10]。根据方程(10), 主频带的两

侧均可能出现几个共振峰。

由于色散波的脉冲宽度相对孤子波来说要长得多,可以假设 $V_p(z, \omega)$ 由一系列分立的窄带宽函数组成,即

$$V_p(z, \omega) = \exp(i2\pi jz) \sum_n A_n(\omega - \omega_n) \quad (11)$$

其中 ω_n 为第 n 个振荡峰值的中心频率,且满足(10)式。 $A_n(\omega - \omega_n)$ 的光谱宽度要比孤子波的光谱宽度小得多。

把(10)和(11)代入(6),得到

$$S(\omega) + \sum_n P_n f(\omega - \omega_n) = 0 \quad (12)$$

其中 $P_n = \int A_n(\omega') d\omega'$ 为频域中的脉冲面积,即由第 n 个峰值的曲线和横轴围成的面积。从(8)和(12)式,我们可以看出如果 $\beta_m = 0 (m > 2)$, 则 $S(\omega) = 0, P_n = 0$, 这意味着当所有的高阶色散全为零时,色散波将不存在。如果不同共振峰之间的频率间隔足够远(实际情况总是如此),我们可以得到一个非常简单的表达式

$$\frac{P_n}{P_0} \approx - \frac{1}{12} \pi (1 + \omega_n^2 \tau^2) \operatorname{sech} \frac{\pi \omega_n \tau}{2} \quad (13)$$

在推导过程中用到(3)式和(12)式。 $P_0 = 2\pi a_0$ 为孤子波的光谱曲线与横轴所围成的面积。(13)式中有一个负号,表明色散波的位相与孤子波相反。值得注意的是,尽管色散波是由高阶色散引起的,色散波的共振峰的位置和能量均与群速度色散有关(通过 ω_n 和 τ)。

2 与实验比较

图1给出了 $|P_n/P_0|$ 随 $\omega_n \tau$ 变化的曲线。从图中可以看出,越靠近孤子波中心频率的共振峰,包含的能量越大。利用(13)式,我们可以根据色散波的峰值光谱强度来估算色散波所具有的能量和脉冲宽度。如果假设色散波也具有双曲正割函数分布($\operatorname{sech}(T/\tau_n)$), 则其时间宽度和能量可以表示为

$$\tau_n = \frac{12 \sqrt{r} \tau}{\pi (1 + \omega_n^2 \tau^2) \operatorname{sech}(\pi \omega_n \tau / 2)} \quad E_n = \frac{r \tau E_s}{\tau_n} \quad (14)$$

其中 r 为第 n 个振荡峰的最大光谱强度与孤子波的最大光谱强度之比, E_s 为孤子的能量。

随着净群速度色散的减少,从孤子波转移到旁带的能量将很快增加。特别是对于 10 fs 以下的脉冲,能量损失变得非常严重。在实际中,如果要求 $P_n/P_0 < 10$ 则下列关系式必须满足

$$|\omega_n \tau| \geq 2.15 \quad (15)$$

在三阶色散起主要作用的情况下,可以得到一个群速度色散和三阶色散之间的关系式

$$\frac{\beta_2^2}{|\beta_3 \Phi_n W|} \geq 0.2 \quad (16)$$

这里 Φ_n 为单位功率的一周往返的非线性相移, W 为腔内脉冲能量。

图2给出了一台 $\text{Cr}^{3+} \cdot \text{LiSGaF}$ 激光器的脉冲光谱实际测量值和相应的色散函数 $D(\lambda)$, 色散考虑到 FOD 为止,各阶色散系数分别为 $\beta_2 = -172.72 \text{ fs}^2$, $\beta_3 = -9982.6 \text{ fs}^3$, $\beta_4 = -101892 \text{ fs}^4$ 。 β_2 为实验测量值, β_3, β_4 从净群速度色散曲线微分得到。脉冲的中心波长为 855 nm, 脉冲宽度(半高全宽)为 40 fs。根据上述理论,满足 $D(\lambda) = 0$ 和 -2π 的位置将出现共振峰值,即色散波将出现在 $\lambda_1 = 826 \text{ nm}$ 和 $\lambda_2 = 908 \text{ nm}$ 处。从图中可以看出,理论预测与实验测

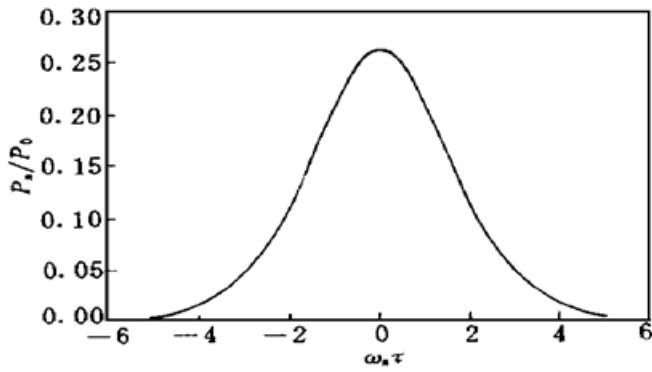
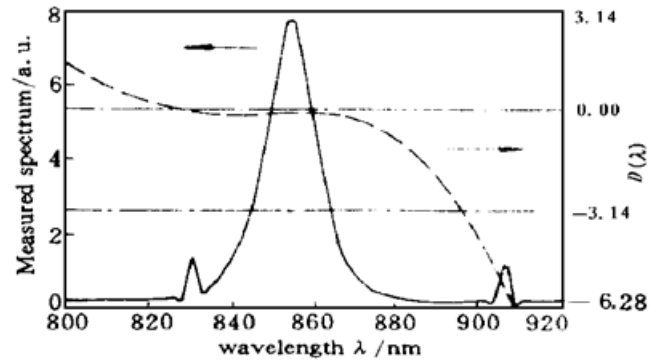


图 1 相对脉冲面积随旁带位置的变化

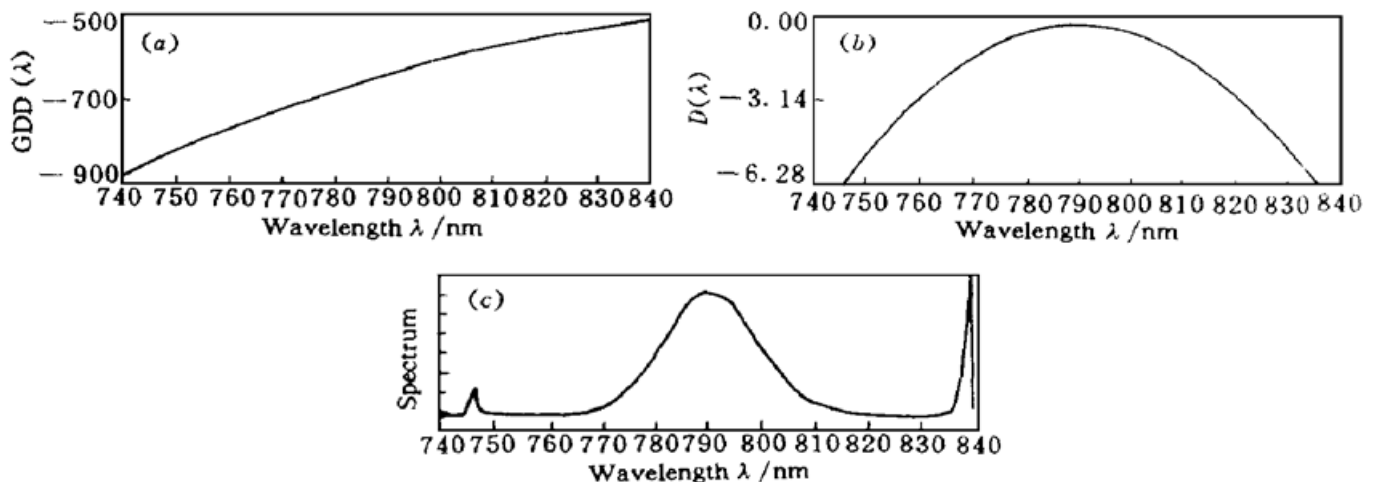
Fig. 1 The dependence of the relative pulse area on the positions of side bands

图 2 一台 $\text{Cr}^{3+}:\text{LiSGaF}$ 激光器的脉冲光谱测量值和相应的色散函数 $D(\lambda)$, 色散考虑到 FOD 为止Fig. 2 Experimental spectrum of a $\text{Cr}^{3+}:\text{LiSGaF}$ laser and the corresponding dispersive function $D(\lambda)$

with dispersion up to FODZ

量值符合得很好。利用(14)式, 可以算出 λ_1 和 λ_2 处的共振峰的时间宽度和相对能量分别为 185 fs, 3.4% 和 1 ps, 1.2%。

图 3 (a) 给出了一台用棱镜对作为色散补偿元件的钛宝石(Ti:sapphire)激光器的群速度色散 GDD(λ) 曲线, 色散系数是根据文献[8]的实验装置选取的, 分别为 $\beta_2 = -643 \text{ fs}^2$, $\beta_3 = -1150 \text{ fs}^3$, $\beta_4 = -3900 \text{ fs}^4$, 以便与测量值进行比较。图 3 (b) 给出了色散函数 $D(\lambda)$ 随波长的变化曲线。图 3 (c) 是实验测量的输出光谱(引自文献[8])。可以看出, 在 $\lambda = 745 \text{ nm}$ 和 836 nm 处, $D(\lambda) = -2\pi$, 根据上述理论, 在这两个波长处将会出现旁带。对比图 3 (b) 和图 3 (c), 可以看出理论预测与实验结果非常吻合。需要指出的是, 虽然在 $\lambda = 836 \text{ nm}$ 处的旁带峰值很高, 甚至超过了主峰, 但这并不违背微扰理论, 因为本文的微扰理论是在时域中的, 旁带的时域振幅、带宽和能量均远小于孤子的相应值。

图 3 (a) 一台钛宝石激光器的群速度色散 $\text{GDD}(\lambda)$ 随波长 λ 的变化曲线; (b) 相应的色散函数 $D(\lambda)$; (c) 光谱的测量值(引自参考文献[8])Fig. 3 (a) Group delay dispersion $\text{GDD}(\lambda)$ vs λ for a Ti:sapphire laser; (b) Corresponding dispersive function $D(\lambda)$; (c) Measured spectrum (from Ref. [8])

3 结 论

本文给出了一个判定克尔透镜锁模激光器中色散波振荡峰值频率的普遍条件。结果表明,多个高阶色散将引起非对称分布于脉冲光谱中的多个振荡峰。色散波相应于长脉冲,其脉冲宽度和能量可以通过简单的公式来估算。这些长脉冲在光腔内伴随着主脉冲一起传输。随着群速度色散的减少,从孤子波到色散波的能量转移迅速增加。本文还给出了一个具有实际意义的决定群速度色散和三阶色散之间相对大小的条件,在此条件下,能量损失是可以容忍的。本文得到的理论结果与实验吻合得非常好,这对色散补偿系统的最佳设计,以最大限度地减少色散波的负面影响具有重要意义。

参 考 文 献

- 1 P. F. Curley, Ch. Spielmann, T. Brabec *et al.*. Operation of a femtosecond Ti:sapphire solitary laser in the vicinity of zero group-delay dispersion. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(1): 54~ 56
- 2 I. T. Sorokina, E. Sorokin, E. Wintner *et al.*. Sub-20 fs pulse generation from the mirror dispersion controlled Cr:LiSGaF and Cr:LiSAF lasers. *Appl. Phys. B*, 1997, **65**(2): 245~ 253
- 3 J. N. Elgin. Soliton propagation in an optical fiber with third-order dispersion. *Opt. Lett.*, 1992, **17**(20): 1409~ 1410
- 4 H. A. Haus, J. D. Moores, L. E. Nelson. Effect of third-order dispersion on passive mode locking. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(1): 51~ 53
- 5 T. Brabec, S. M. J. Kelly. Third-order dispersion as a limiting factor to mode locking in femtosecond solitary lasers. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(23): 2002~ 2004
- 6 J. Herrmann, V. P. Kalosha, M. Müller. Higher-order phase dispersion in femtosecond Kerr-lens mode-locked solid-state lasers: sideband generation and pulse splitting. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(4): 236~ 238
- 7 I. P. Christov, M. M. Murnane, H. C. Kapteyn *et al.*. Fourth-order dispersion-limited solitary pulses. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(18): 1465~ 1467
- 8 M. K. Reed, M. K. Steiner-Shepard, D. K. Negus. An efficient diode-based Ti:sapphire ultrafast laser. *OSA TOPS on Advanced Solid-state Lasers*, 1996, (1): 237
- 9 J. P. Gordon. Dispersive perturbations of solitons of the nonlinear Schrödinger equation. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1992, **9**(1): 91~ 97
- 10 S. M. J. Kelly. Characteristic sideband instability of periodically amplified average soliton. *Electron. Lett.*, 1991, **28**(8): 806~ 807

Dispersive Waves in a Kerr-lens Mode-locked Solitary Laser

Lin Qiang E. Wintner* I. T. Sorokina*

*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310028; * Abteilung Quantenelektronik und Lasertechnik, Technische Universität Wien, Gusshausstrasse 27-29/359-4, A-1040 Wien, Austria*

Abstract The generation of dispersive waves caused by multi higher-order dispersions in Kerr-lens mode-locked solitary lasers is investigated by soliton perturbation theory. Analytical expressions for resonant frequencies, temporal width and energy of dispersive waves are derived, which are in good agreement with experimental measurements. The results are important for intra-cavity dispersion management for improving the pulse quality and minimizing the pulse energy drain.

Key words Kerr-lens mode-locked laser, ultrashort pulse, dispersive wave