

# 偏 心 椭 圆 高 斯 光 束

沈学举 王 斧 刘秉琦 张 维

(军械工程学院光学教研室 石家庄 050003)

**提要** 在椭圆高斯光束横坐标中引入复数偏移量, 将其推广为偏心椭圆高斯光束。在垂直于  $z$  轴截面内强度分布仍然是椭圆高斯函数分布, 在传播方向上光束峰值强度沿直线分布, 波前也存在横向位移。对偏心椭圆高斯光束经一阶光学系统的变换关系进行了定量推导。对传播方向偏离  $z$  轴的椭圆高斯光束经薄透镜传播时的特例进行了讨论。

**关键词** 椭圆高斯光束, 偏心椭圆高斯光束, 激光束传输

## 1 引 言

高斯光束和椭圆高斯光束作为描述激光束的基本模式, 对其传输特性已进行了较深入的研究<sup>[1-3]</sup>。近来, 文献[4]提出了偏心高斯光束的概念, 它具有和通常圆高斯光束相同的复曲率  $q(z)$ , 其中  $z$  是通常圆高斯光束的传播方向坐标。在  $xy$  面内其强度分布是具有横向偏移的高斯函数分布, 在其传播方向峰值强度分布是与  $z$  轴成一定夹角的直线, 光束波前曲率中心也发生相应变化。本文利用类似的方法对椭圆高斯光束进行推广, 得到偏心椭圆高斯光束, 并对其传输特性进行了定量分析。

## 2 偏心椭圆高斯光束

抛物面波波函数

$$u_0(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left[-ik \frac{x^2}{2z}\right] \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left[-ik \frac{y^2}{2z}\right] \quad (1)$$

其中  $z$  为传播方向坐标,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数。

作变换

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left[-ik \frac{x^2}{2z}\right] &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{q_x(z)}} \exp\left[-ik \frac{x^2}{2q_x(z)}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left[-ik \frac{y^2}{2z}\right] &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{q_y(z)}} \exp\left[-ik \frac{y^2}{2q_y(z)}\right] \end{aligned}$$

其中  $q_x(z) = (z + \delta) + iz_{0x}$ ,  $q_y(z) = (z - \delta) + iz_{0y}$  (2)

可将抛物面波变换为椭圆高斯光束。其中  $2\delta$  为  $xz$  面和  $yz$  面内束腰的离散量,  $z_{0x}$ ,  $z_{0y}$  分别为  $xz$  面和  $yz$  面内的瑞利距离。若在  $x, y$  方向引入复位移, 令

$$x \rightarrow x + ix_0, \quad y \rightarrow y + iy_0$$

其中,  $x_0, y_0$  为实数。

把  $x, y, z$  的变换代入(1)式可得偏心椭圆高斯光束分布的复振幅为

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{q_x(z)q_y(z)}} \exp\left[-ik\left[\frac{(x+ix_0)^2}{2q_x(z)} + \frac{(y+y_0)^2}{2q_y(z)}\right]\right] \exp(-ikz) \quad (3)$$

其中(2)式可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_j(z)} &= \frac{1}{R_j(z)} - i\frac{1}{\pi\omega_j^2(z)} \\ \omega_j^2 &= \omega_{0j}^2 \left[1 + \left|\frac{(z-\delta_j)}{z_{0j}}\right|^2\right] \\ R_j(z) &= (z-\delta_j) \left[1 + \left|\frac{z_{0j}}{(z-\delta_j)}\right|^2\right] \\ \omega_{0j} &= \sqrt{\frac{\lambda z_{0j}}{\pi}} \\ \delta_j &= \mp \delta \quad (j = x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

由(3)式得偏心椭圆高斯光束强度分布为

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= |u(x, y, z)|^2 = I_0 \frac{\omega_{0x}\omega_{0y}}{\omega_x(z)\omega_y(z)} \exp\left[2\left[\frac{x_0^2}{\omega_{0x}^2} + \frac{y_0^2}{\omega_{0y}^2}\right]\right] \cdot \\ &\exp\left[-2\left[\frac{(x-x_I(z))^2}{\omega_x^2(z)} + \frac{(y-y_I(z))^2}{\omega_y^2(z)}\right]\right] \end{aligned} \quad (5)$$

光束相位分布为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x, y, z) &= k\frac{[x-x_p(z)]^2}{2R_x(z)} + k\frac{[y-y_p(z)]^2}{2R_y(z)} + kz - k\frac{x_0^2}{2R_x(z)} - k\frac{y_0^2}{2R_y(z)} - \\ &\frac{z_{0x}x_0^2}{(z+\delta)\omega_x^2(z)} - \frac{z_{0y}y_0^2}{(z-\delta)\omega_y^2(z)} - \frac{1}{2}\arctg\left[\frac{z+\delta}{z_{0x}}\right] - \frac{1}{2}\arctg\left[\frac{z-\delta}{z_{0y}}\right] \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} x_I(z) &= x_0 \frac{z+\delta}{z_{0x}} & y_I(z) &= y_0 \frac{z-\delta}{z_{0y}} \\ x_p(z) &= -x_0 \frac{z_{0x}}{z+\delta} & y_p(z) &= -y_0 \frac{z_{0y}}{z-\delta} \end{aligned}$$

由(5)式看出,任意 $z$ 处截面上偏心椭圆高斯光束强度分布是宽度为 $\omega_x(z), \omega_y(z)$ 的椭圆高斯函数分布。由 $x_I(z), y_I(z)$ 表示式可知,(5)式表示的偏心椭圆高斯光束峰值强度分布是一条直线,其直线方程为

$$\begin{aligned} x - \frac{x_0}{z_{0x}}z - \frac{x_0}{z_{0x}}\delta &= 0 \\ y - \frac{y_0}{z_{0y}}z + \frac{y_0}{z_{0y}}\delta &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

或者由(5),(7)式,令 $x=0$ 或 $y=0$ 得 $xz$ 或 $yz$ 平面内峰值强度分布分别是与 $z$ 轴成一定夹角的直线,且分别与 $z$ 轴交于 $z=\mp\delta$ 处,与 $z$ 轴夹角分别为

$$\begin{aligned} \theta_x &= \arctg\left[\frac{x_0}{z_{0x}}\right] \\ \theta_y &= \arctg\left[\frac{y_0}{z_{0y}}\right] \end{aligned} \quad (8)$$

由文献[1],椭圆高斯光束在 $x, y$ 方向上可看成是两束独立的圆高斯光束的传播。因此偏心椭圆高斯光束在 $x, y$ 方向上也可看成是两束独立的偏心圆高斯光束的传播,在 $xz, yz$ 平面内峰值强度轴与 $z$ 轴交点不重合,如图1所示。

当  $x_0 = y_0 = 0$  时, (5) 式变为

$$I(x, y, z) = I_0 \frac{\omega_x \omega_y}{\omega_x(z) \omega_y(z)} \exp \left[ -2 \left| \frac{x^2}{\omega_x^2(z)} + \frac{y^2}{\omega_y^2(z)} \right| \right] \quad (9)$$

(9) 式即为通常椭圆高斯光束光强度分布表示式。此

时, (7) 式变为  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ , 即峰值强度轴为  $z$  轴。

当  $\delta = 0, \omega_x = \omega_y = \omega, y_0 = 0$  时, (5) 式即文献[4] 中的(3) 式。

由(6) 式知, 偏心椭圆高斯光束在  $z$  处的波前曲率中心存在横向偏移, 当  $\delta = 0, \omega_x = \omega_y = \omega, y_0 = 0$  时, (6) 式即文献[4] 中的(4) 式。

作为更一般情况, 偏心椭圆高斯光束复振幅分布(3) 式可写为

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{q_x(z) q_y(z)}} \exp \left[ -ik \left[ \frac{(x - p_x)^2}{2q_x(z)} + \frac{(y - p_y)^2}{2q_y(z)} \right] \right] \exp(-ikz) \quad (10)$$

其中  $p_x = x_d - ix_0, p_y = y_d - iy_0$ 。此时(10) 式表示的偏心椭圆高斯光束相对于(3) 式其  $x, y$  坐标分别平移了  $x_d, y_d$ 。

### 3 偏心椭圆高斯光束通过光学系统的变换

当偏心椭圆高斯光束通过矩阵为  $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$  的一阶光学系统时, 若输入平面和输出平面光波复振幅为  $U(x, y, z_1)$  和  $U(\xi, \eta, z_2)$ , 两平面间光程差为  $L$ , 则由广义惠更斯-菲涅耳积分公式得

$$U(\xi, \eta, z_2) = -\frac{i}{\lambda B} \exp(ikL) \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z_1) \exp \left[ \frac{ik}{2B} [A(x^2 + y^2) - 2(x\xi + y\eta) + D(\xi^2 + \eta^2)] \right] dx dy \quad (11)$$

由(10) 式可知,  $U(x, y, z_1)$  可分解为  $x$  和  $y$  的两函数之积  $U(x, y, z_1) = X_{z_1}(x) Y_{z_1}(y)$ 。由(11) 式可知,  $U(\xi, \eta, z_2)$  也可分解为两独立的一维积分之积

$$U(\xi, \eta, z_2) = X_{z_2}(\xi) Y_{z_2}(\eta) \quad (12)$$

其中 
$$X_{z_2}(\xi) = U_{0x} \sqrt{\frac{-i}{\lambda B} \exp\left[\frac{ikL}{2}\right]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -ik \frac{(x - p_x)^2}{2q_x} \right] \cdot$$

$$\exp \left[ -\frac{ik}{2B} (Ax^2 - 2x\xi + D\xi^2) \right] dx =$$

$$U_0 \exp \left[ -ik \frac{(\xi - p_{\xi}')^2}{2q_{\xi}'} \right] \quad (13)$$

其中 
$$q_{\xi}' = \frac{Aq_x + B}{Cq_x + D} \quad p_{\xi}' = \frac{p_x}{Cq_x + D} \quad (14)$$

同理可得  $y$  方向的  $p, q$  参量满足同样关系, 因此有

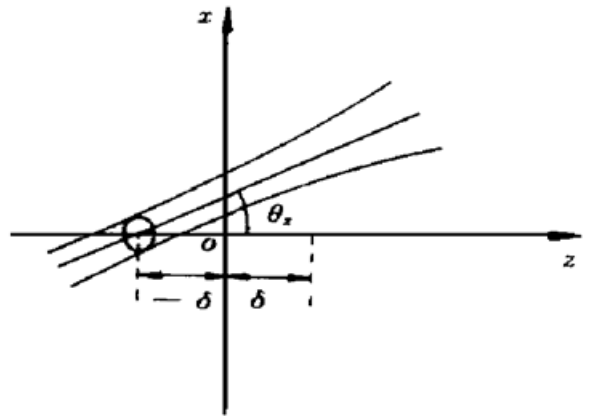


图1  $xz$  平面内偏心椭圆高斯光束的传播  
Fig. 1 Propagation of a decentered elliptical Gaussian beam in the  $xz$  plane

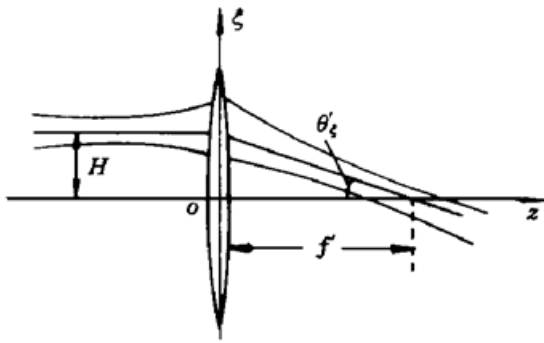


图 2 离轴椭圆高斯光束经薄透镜的变换

Fig. 2 Transformation of the off-axis elliptical Gaussian beam passing through a thin lens

$$\begin{aligned} q_j' &= \frac{Aq_i + B}{Cq_i + D} \\ p_j' &= \frac{p_i}{Cq_i + D} \end{aligned} \quad \begin{cases} i = x, y \\ j = \xi, \eta \end{cases} \quad (15)$$

所以偏心椭圆高斯光束经一阶光学系统变换后仍然是偏心椭圆高斯光束,但其  $p, q$  参量发生变化。

#### 4 离轴椭圆高斯光束经薄透镜的传输

如图 2 所示,入射光束是一束通常椭圆高斯光束,其中心对称轴(峰值强度轴)与  $z$  轴距离为  $H$ ,薄透镜矩

阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$ 。入射光束  $p, q$  参量为

$$\begin{cases} q_x = z + \delta + iz_{0x} \\ q_y = z - \delta + iz_{0y} \end{cases} \quad \begin{cases} p_x = H \\ p_y = 0 \end{cases} \quad (16)$$

由(15)式得变换光束参量为

$$p_{\xi}' = \xi_d' - i\xi_0' = \frac{H \left[ 1 - \frac{z + \delta}{f} \right] + iH \frac{z_{0x}}{f}}{\left[ 1 - \frac{z + \delta}{f} \right]^2 + \left[ \frac{z_{0x}}{f} \right]^2} \quad (17)$$

$$q_{\xi}' = z_1' + iz_{0\xi}' = \frac{(z + \delta) \left[ 1 - \frac{z + \delta}{f} \right] - \frac{z_{0x}^2}{f}}{\left[ 1 - \frac{z + \delta}{f} \right]^2 + \left[ \frac{z_{0x}}{f} \right]^2} + iz_{0x} \quad (18)$$

$$p_{\eta}' = 0 \quad (19)$$

$$q_{\eta}' = z_2' + iz_{0\eta}' = \frac{(z - \delta) \left[ 1 - \frac{z - \delta}{f} \right] - \frac{z_{0y}^2}{f}}{\left[ 1 - \frac{z - \delta}{f} \right]^2 + \left[ \frac{z_{0y}}{f} \right]^2} + iz_{0y} \quad (20)$$

由(17)式,因为  $p_{\xi}'$  是复数,所以入射椭圆高斯光束经薄透镜变换后成为偏心椭圆高斯光束。因为  $p_{\eta}'$  为零,所以输出光束峰值强度轴在  $z\xi$  平面内。由(7), (17), (18) 式或者(8), (17), (18) 式可得峰值强度轴与  $z$  轴夹角为

$$\theta_{\xi}' = \arctg \left[ -H/f \right] \quad (21)$$

本文通过在垂直于椭圆高斯光束传播方向的  $x, y$  坐标中引入复位移参量  $x_0, y_0$  可将椭圆高斯光束扩展为偏心椭圆高斯光束。通常的高斯光束和椭圆高斯光束是它的特殊情况。偏心椭圆高斯光束经一阶光学系统后仍然是偏心椭圆高斯光束,定量推导了描述其基本性质的基本参量的变换关系。用偏心椭圆高斯光束可以更好地描述圆高斯光束和椭圆高斯光束的传输。

#### 参 考 文 献

- 1 Zhang Xiaohui. The collimation of elliptical Gaussian beam. *Laser Technology* (激光技术), 1989, **13**(5): 55~ 61 (in Chinese)
- 2 Wei Guanghui, Zhu Baolian. *Laser Beam Optics*. Beijing: BeiJing Industrial Academy Publishing House, 1988. 59 (in Chinese)
- 3 Zhou Bingkun, Cao Yishi, Chen Jiahua. *Laser Principle*. Beijing: National Industrial Publishing House

1987. 98 (in Chinese)

- 4 Abdul-Azeez, R. Al-Rashed, Bahaa E. A. Saleh. Decentered Gaussian beams. *Appl. Opt.*, 1995, **34** (30): 6819~ 6825

## A Decentered Elliptical Gaussian Beam

Shen Xueju Wang Fu Liu Bingqi Zhang Chu

(Ordnance Engineering Academy Optical Teaching and Researching Section, Shijiazhuang 050003)

**Abstract** The generalization of an elliptical Gaussian beam is presented by introducing a complex shift in the transverse coordinates. The intensity distribution of the resulting beam is a Gaussian function distribution with the width varying as an ordinary elliptical Gaussian beam in the plane perpendicular to  $z$  axis, the peak intensity of which traces a linear trajectory. The wave fronts are displaced laterally. The beam is referred to as a decentered elliptical Gaussian beam, its transformation is deduced quantitatively when passing through an optical system.

**Key words** elliptical Gaussian beam, decentered elliptical Gaussian beam, laser beam propagation