

加法色噪声对双模激光竞争效应的影响*

陈黎梅^{1,2} 曹 力^{1,3} 丘军林²

(¹华中理工大学物理系; ²激光技术国家重点实验室 武汉 430074; ³CCAST(世界实验室) 北京 100080)

摘要 研究了加法色噪声对双模激光竞争效应的影响。通过线性稳定性分析以及小 τ 近似得到一些很有意义的结论。

关键词 双模激光, 模间竞争, 加法色噪声

1 引 言

模间竞争效应是研究激光多模振荡的重要问题之一。而双模振荡情况又是多模振荡的一个重要例子。60 年代, 人们对双模激光模间竞争效应的研究均是在确定论基础上的^[1,2]。然而, 在实际情况中, 激光器工作时总会伴随着涨落的出现。只要激光器在工作, 自发辐射的量子噪声和泵涨落就会出现。特别是量子噪声, 无论激光器是否工作, 它都始终存在。尤其在阈值附近, 它对激光器的工作有着至关重要的影响。70 年代末期以来, 许多作者研究了量子噪声(加法噪声)对双模激光的影响^[3,4]。但他们均侧重于考虑激光输出光强定态几率分布及其定态矩, 而考虑加法噪声对双模激光模间竞争效应的影响却未见报道。

通常, 加法噪声被看作白噪声, 但白噪声只是一种理想情况, 而色噪声则更接近实际情况。本文所考虑的加法噪声为 O-U 噪声, 研究在阈值附近加法色噪声对双模激光模间竞争效应的影响。我们的方法是首先对两模的光强方程在定态附近作线性化, 应用小 τ 近似^[5]得出扰动平均值随时间演化的线性方程组; 然后通过稳定性分析, 得出加法色噪声对模间竞争效应的影响; 再通过与加法白噪声情况进行比较, 最终看出加法色噪声效应。

2 两模定态光强 I_{1s} 和 I_{2s}

加法色噪声驱动的无量纲环形双模激光光场振幅方程为^[3,4]

$$\frac{dE_1}{dt} = (a_1 - A_1|E_1|^2 - \xi_1|E_2|^2) + q_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = (a_2 - A_2|E_2|^2 - \xi_2|E_1|^2) + q_2(t) \quad (2)$$

其中 a_1 和 a_2 分别为两模的泵参数, 且 $a_1 > 0$ 及 $a_2 > 0$; A_1 和 A_2 分别为两模的自饱和系数; ξ_1 和 ξ_2 为两模的交叉耦合系数; E_1 和 E_2 分别为两模的光场振幅; $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 为 O-U 噪声, 即为高斯

* 国家自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1998-03-31; 收到修改稿日期: 1998-07-06

噪声, 其关联时间 $\tau \neq 0$, 且满足下面的统计性质^[5]

$$\langle q_i(t) \rangle = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$\langle q_i(t) q_i^*(t') \rangle = 2(Q/\tau) \exp(-|t - t'|/\tau) \quad (4)$$

其中 Q 为噪声强度。

由 $E = \sqrt{I} \exp(i\varphi)$ 将方程(1), (2) 化成光强方程为

$$\frac{dI_1}{dt} = 2(a_1 - A_1 I_1 - \xi_1 I_2) + Q + \sqrt{2QI_1} q_{1R}(t) \quad (5)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = 2(a_2 - A_2 I_2 - \xi_2 I_1) + Q + \sqrt{2QI_2} q_{2R}(t) \quad (6)$$

其中 $q_{iR}(t)$ 为加法色噪声 $q_i(t)$ 的实部, 且有

$$\langle q_{iR}(t) \rangle = 0 \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

$$\langle q_{iR}(t) q_{iR}(t') \rangle = (Q/\tau) \exp(-|t - t'|/\tau) \quad (8)$$

设 I_{1s} 和 I_{2s} 为两模确定论定态光强, 经过计算得

$$I_{1s} = \frac{\bar{a}_1}{A_1(1-C)} \quad I_{2s} = \frac{\bar{a}_2}{A_2(1-C)} \quad (9)$$

其中

$$\bar{a}_1 = a_1 - \xi_1 \frac{a_2}{A_2} \quad \bar{a}_2 = a_2 - \xi_2 \frac{a_1}{A_1} \quad C = \frac{\xi_1 \xi_2}{A_1 A_2} \quad (10)$$

\bar{a}_1, \bar{a}_2 分别为两模的有效增益系数; C 为两模的耦合常数, 它的大小反映了两模之间的耦合强弱, 当 $C > 1$ 时为强耦合, 当 $C < 1$ 时为弱耦合^[1,2]。

3 扰动平均值方程组及稳定性条件

对两模光强 I_1, I_2 在其确定论定态光强附近做小扰动, 令

$$I_1 = I_{1s} + \varepsilon_1(t) \quad I_2 = I_{2s} + \varepsilon_2(t) \quad (11)$$

其中 $\varepsilon_1(t)$ 和 $\varepsilon_2(t)$ 分别为对两模在确定论定态光强 I_{1s} 和 I_{2s} 附近的小扰动。

将(11)式代入(5), (6)式, 在定态光强 I_{1s} 和 I_{2s} 附近做线性化^[1,2], 忽略二阶项, 然后两边取平均, 再利用小 τ 近似^[5]计算整理得扰动平均值方程组为

$$\frac{d\langle \varepsilon_1(t) \rangle}{dt} = - \left(2I_{1s}A_1 - \frac{Q}{2I_{1s}} \right) \langle \varepsilon_1(t) \rangle - 2I_{1s}\xi_1 \left(1 - \frac{Q\tau}{2I_{1s}} \right) \langle \varepsilon_2(t) \rangle \quad (12)$$

$$\frac{d\langle \varepsilon_2(t) \rangle}{dt} = - \left(2I_{2s}A_2 - \frac{Q}{2I_{2s}} \right) \langle \varepsilon_2(t) \rangle - 2I_{2s}\xi_2 \left(1 - \frac{Q\tau}{2I_{2s}} \right) \langle \varepsilon_1(t) \rangle \quad (13)$$

写成矩阵形式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1(t) \rangle \\ \langle \varepsilon_2(t) \rangle \end{bmatrix} = - \Theta \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_1(t) \rangle \\ \langle \varepsilon_2(t) \rangle \end{bmatrix} \quad (14)$$

得稳定矩阵为^[1,2]

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_{1s}A_1 - \frac{Q}{2I_{1s}} & 2I_{1s}\xi_1 \left(1 - \frac{Q\tau}{2I_{1s}} \right) \\ 2I_{2s}\xi_2 \left(1 - \frac{Q\tau}{2I_{2s}} \right) & 2I_{2s}A_2 - \frac{Q}{2I_{2s}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

则线性方程组(14)有稳定解的条件, 即两模有稳定振荡的条件为^[1,2]

$$\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21} > 0 \tag{16}$$

设 $T = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}$, 由(15)式和(9)式计算整理得

$$T = \frac{4\bar{a}_1\bar{a}_2}{(1-C)}G(Q) \tag{17}$$

其中

$$G(Q) = 1 - \left[\frac{(\bar{a}_1^2 A_2 + \bar{a}_2^2 A_1)(1-C)}{4\bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2} - \frac{(\bar{a}_1 A_2 + \bar{a}_2 A_1)C\tau}{2\bar{a}_1 \bar{a}_2} \right] Q + \left[\frac{A_1 A_2 (1-C)^3}{16\bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2} - \frac{A_1 A_2 (1-C)C\tau^2}{4\bar{a}_1 \bar{a}_2} \right] Q^2 \tag{18}$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 为加法白噪声情况, 此时(18)式变成

$$G'(Q) = 1 - \left[\frac{(\bar{a}_1^2 A_2 + \bar{a}_2^2 A_1)(1-C)}{4\bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2} \right] Q + \left[\frac{A_1 A_2 (1-C)^3}{16\bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2} \right] Q^2 \tag{19}$$

稳定性条件(16)式又可写为

$$T > 0 \tag{20}$$

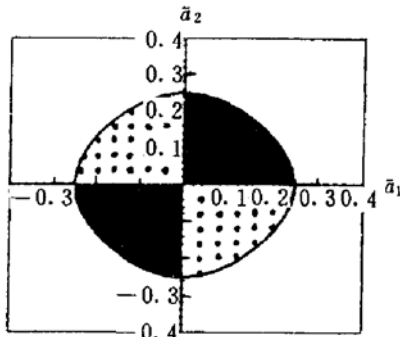


图 1 分界线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0$, $C = 1.5, Q = 1$ 的加法白噪声情况

Fig. 1 Separatrix corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0, C = 1.5$, and $Q = 1$

4 分析及结论

下面首先根据(20)式, 分别在强耦合区 ($C > 1$) 和弱耦合区 ($C < 1$) 讨论加法色噪声对双模激光竞争效应的影响, 然后作图进行详细说明。图 1 至图 3 是令(18)式左边取为 0, 并取 $A_1 = A_2 = 1$, 在 $\bar{a}_1 - \bar{a}_2$ 平面内取不同的 τ, Q, C 值时, 加法噪声驱动的双模激光竞争效应分布图。

4.1 $C > 1$ (强耦合区)

(1) 当 \bar{a}_1 和 \bar{a}_2 反号(表示只有一个模可能建立起稳定振荡)

若 $Q = 0$	则 $T > 0$	有稳定解
$Q \neq 0$ 且 $G(Q) > 0$	$T > 0$	有稳定解
$Q \neq 0$ 且 $G(Q) < 0$	$T < 0$	无稳定解

(2) 当 \bar{a}_1 和 \bar{a}_2 同号(表示两个模可能同时建立起稳定振荡)

若 $Q = 0$	则 $T < 0$	无稳定解
$Q \neq 0$ 且 $G(Q) > 0$	$T < 0$	无稳定解
$Q \neq 0$ 且 $G(Q) < 0$	$T > 0$	有稳定解

以上分析表明, 在强耦合区, 若不考虑加法噪声的存在 ($Q = 0$), 两模的竞争效应表现为只有一个模能建立起稳定振荡, 而另一个模被抑制。但当考虑加法噪声的影响时 ($Q \neq 0$), 两模可能同时建立起稳定振荡。

为了进一步证明加法色噪声的影响效果, 首先分析加法白噪声对模间竞争效应的影响, 然后再将加法色噪声与之进行比较。先看图 1 的加法白噪声情况。若不考虑噪声的存在, 在图 1 的②, ④象限的整个区域内, 两模的竞争效应表现为一个模最终能建立起稳定振荡, 而另一个模被抑制; 在图 1 的①, ③象限的整个区域内, 两模均被抑制。但当考虑加法噪声的存在时, 情况就发生了变化。这时在图 1 的第②, ④象限内, 只有在打点部分以外的区域里, 两模的竞

争效应继续表现为一个模最终能建立起稳定振荡,另一个模被抑制,而在打点部分以内的区域里,两模均被抑制。在图 1 的第①,③象限内,也只有涂黑部分以外的区域里两模均被抑制,而在涂黑部分以内的区域里两模出现了新的竞争效应,表现为两个模均能建立起稳定振荡。再看图 2 (a) 的加法色噪声情况。从图 2(a) 中可以看出,虚线在各象限中与坐标轴所围的面积(相当于图 1 中打点部分和阴影部分面积)都比实线的大,即虚线的新效应区比实线大,这说明在强耦合区,加法色噪声对模间竞争效应的影响比加法白噪声的大。

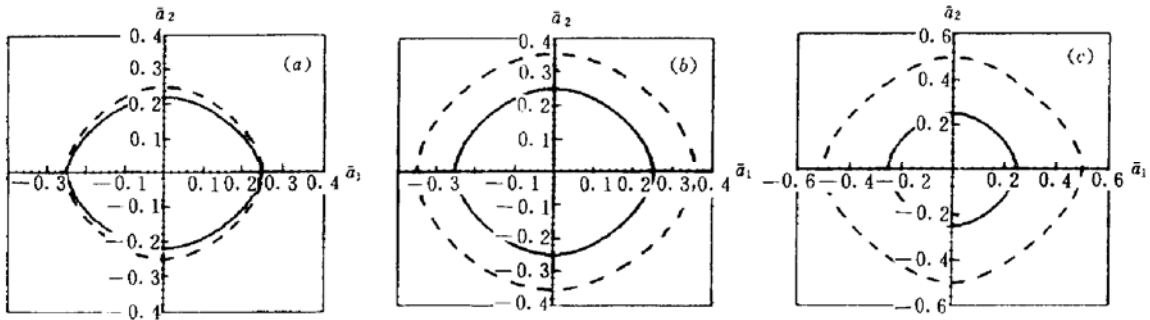


图 2

(a) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0, C = 1.5, Q = 1$ 的加法白噪声情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 1.5, Q = 1$ 的加法色噪声情况;(b) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 1.5, Q = 1$ 的情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 1.5, Q = 2$ 的情况;(c) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 1.5, Q = 1$ 的情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 2, Q = 1$ 的情况

Fig. 2

(a) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0, C = 1.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 1.5$, and $Q = 1$; (b) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 1.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 1.5$, and $Q = 2$; (c) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 1.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 2.0$, and $Q = 1$

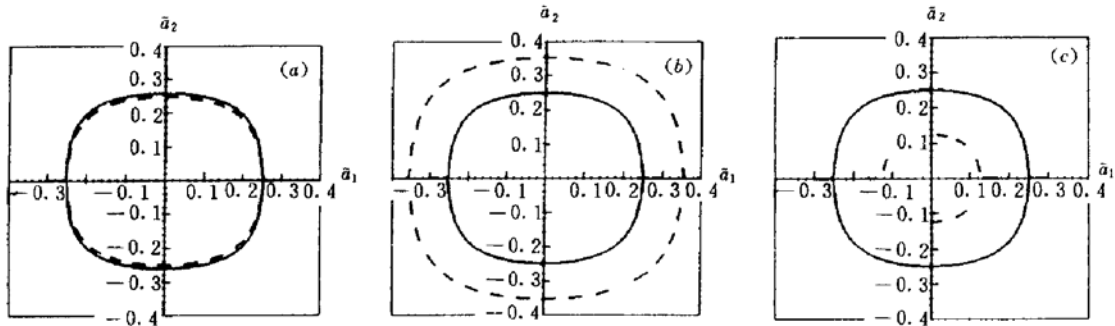


图 3

(a) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0, C = 0.5, Q = 1$ 的加法白噪声情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 0.5, Q = 1$ 的加法色噪声情况;(b) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 0.5, Q = 1$ 的情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 0.5, Q = 2$ 的情况;(c) 实线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 0.5, Q = 1$ 的情况,虚线对应于取 $G(Q) = 0$ 且 $\tau = 0.001, C = 0.75, Q = 1$ 的情况

Fig. 3

(a) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0, C = 0.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 0.5$, and $Q = 1$; (b) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 0.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 0.5$, and $Q = 2$; (c) Solid curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 0.5$, and $Q = 1$; dashed curve corresponds to $G(Q) = 0$ with $\tau = 0.001, C = 0.75$, and $Q = 1$

那么,在强耦合区,随着噪声强度 Q 及模间耦合常数 C 取值的不同,加法色噪声对模间竞争的影响又是怎样的呢?由图 2(b), (c) 中虚线与实线的比较看出,虚线的新效应区都比实线大,这说明在强耦合区,随着噪声强度 Q 以及模间耦合常数 C 值的增加,加法色噪声对模间竞争效应的影响都在不断增强。

4.2 $C < 1$ (弱耦合区)

与强耦合区的分析方法类似,我们发现,在弱耦合区,若不考虑加法噪声 ($Q = 0$),两模的竞争效应表现为两个模能同时建立起稳定振荡。但当考虑加法噪声的存在时 ($Q \neq 0$),两模中可能有一个会被抑制。又由图 3(a) 看出,在弱耦合区,加法色噪声对模间竞争效应的影响要比加法白噪声的小。图 3(b), (c) 表明,在弱耦合区,随着噪声强度 Q 的增加,加法色噪声对模间竞争效应的影响加强;可是随着模间耦合常数 C 值的增加,加法色噪声对模间竞争效应的影响反而减弱。

参 考 文 献

- 1 M. Sargent, M. O. Scully, W. E. Lamb. *Laser Physics*. Canada; Addison-wesley, 1974. 120~127
- 2 Feng Zhi-chao, Cheng Zhi, Xi Bing. *Laser Physics*. Chengdu; Chengdu Telecommunication University Press, 1988. 376~382
- 3 Shiqun Zhu. Saturation effects in a two-mode ring laser. *Phys. Rev. A*, 1994, 50(2):1710~1715
- 4 Xiaoping Zhou, Weijian Gao, Shiqun Zhu. Saturation effects in a two-mode ring laser with both additive and multiplicative noise. *Phys. Lett. A*, 1996, 213:43~48
- 5 A. Hernandez-Machado, M. San Miguel. Dynamical properties of non-Markovian Stochastic differential equations. *J. Math. Phys.*, 1984, 25(4):1066~1075

Mode-competition Effects of a Two-mode Laser with Additive Coloured Noise

Chen Limei^{1,2} Cao Li^{1,3} Qu Junlin²

(¹Department of Physics and ²National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074; ³CCAST (World Laboratory), Beijing 100080)

Abstract The effect of the additive coloured noise on mode-competition of a two-mode laser is studied. By means of a linear stability analysis, considering τ as a small parameter, some conclusions have been obtained. In strong coupling, the effect of the additive colored noise on mode-competition is stronger than that of the additive white noise, and increases with the increasing of noise strength. In weak coupling, the effect of the additive colored noise on mode-competition is weaker than that of the additive white noise, and decreases with the increasing of coupling constants.

Key words two-mode laser, mode-competition, additive coloured noise