第 26 卷 第 1 期 中 国 激 光 Vol. A26, No. 1
1999 年 1 月 CHINESE JOURNAL OF LASERS January, 1999

关于衍射与无衍射光束

谢兴龙 陈绍和 邓锡铭

(中国科学院上海光机所高功率激光联合实验室 上海 201800)

提要 分析了衍射与无衍射光束的特点，讨论了无衍射光束的判据，指出衍射实质上是波动方程的非本征解光束在传输过程中趋于本征解光束的特点。

关键词 衍射，无衍射光束，本征值光束

1 真空中光的衍射

光在真空中沿某一固定方向传播时，遇到障碍物发生的绕射现象，称之为衍射，基于这一定义，发展了基尔霍夫衍射积分[1]和柯林斯衍射积分[2]的方法，并在此基础上又进行了推广，以至可以同时处理光束传输过程中的时域和空域问题[3]，然而，由于这一定义最初是从现象上归纳而得的，所以上述两种方法不能解决在障碍物的边界所发生的困难，故此很有必要进一步分析一下衍射的本质。

光在传输过程中发生的衍射现象是波动光学的结果，在波动光学中，讨论光传输问题最基本的方法是 Fourier 变换法，其方程为

$$E(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}\omega E(k_x,k_y,\omega) \times \exp i\left[\omega t - k_x x - k_y y - \sqrt{(\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}\right] \tag{1}$$

式中，

$$E(k_x,k_y,\omega) = \iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t E(x,y,0,t)\exp[-i(\omega t - k_x x - k_y y)] \tag{2}$$

$E(x,y,0,t)$ 是 $z=0$ 的光振幅表达式。我们抛开有关障碍物的问题，首先讨论一下相关的几种光束的传输情况。

1.1 无穷大空间内的等幅平面波

无穷大空间内的等幅平面波在 $z=0$ 处可表示为

$$u = A\exp(i\omega_0 t) \tag{3}$$

按(1)，(2)式可求得

$$u = A\exp[i\omega_0(t - z/c)] \tag{4}$$

由此可以看出，无穷大空间内的等幅平面波在传输过程中，除了有一个 z/c 的时间延迟外，振幅不随传输距离的变化而变化，也就是说不存在衍射问题。

收稿日期：1997-06-04；收到修改稿日期：1998-01-09

1.2 具有高斯分布的无穷大空间的非等幅平面波

具有高斯分布的无穷大空间的非等幅平面波在 $z = 0$ 处可表示为

$$u(x,y) = \frac{a_0}{\sqrt{\sigma_0}}\exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma_0}\right)^2\right] \tag{5}$$

其中 a_0 为常数,σ_0 为光束的光腰半径,$r^2 = x^2 + y^2$。在传输过程中有[4]

$$u(x,y,z) = \frac{a_0}{\sqrt{\sigma_0}}\exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right] \tag{6}$$

其中 $\sigma^2 = \frac{1}{k^2\sigma_0^2}(k^2\sigma_0^4 + 4z^2)$。由(6)式看出,光束在传输过程中,随着传输距离的增大,宽度会越来越宽,也就是说,具有高斯分布的非等幅平面波即使在没有遇到障碍物的情况下,也会发生衍射现象,而这种结果是由于振幅的不均匀度(从光场调制的意义上来说可以等价于一个障碍物)所造成的。

1.3 一维有限束宽等幅平面波

无穷大空间内的等幅平面波经过一个狭缝是最典型的衍射现象,利用(1),(2)式,并采用求稳态相位点的方法[5],可以求出一维有限束宽等幅平面波在传输过程中的远场振幅为

$$u(x,z) = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{k\pi}}\exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - k\sqrt{x^2 + z^2}\right)\right]\cdot\frac{\sin(kax/r)}{x} \tag{7}$$

式中 $2a$ 为一维狭缝的宽度,$z = 0$ 处的光振幅为 1,$r^2 = x^2 + z^2$。与 1.2 相似,一维无限大等幅平面波在传输过程中,其宽度也随着传输距离 z 的增大而变宽,最终趋于振幅均匀的平面波。

1.4 任意构造的具有凹顶的有限束宽非等幅平面波

为进一步讨论光束传输过程中的特点,我们构造如下光场

$$u(x,z=0) = A(e^x + e^{-x}) \qquad (|x| < a) \tag{8}$$

可以得出

$$u(x,z) = A\sqrt{\frac{2r}{k\pi}}\,\frac{\exp[i(\pi/4 - kr)]}{r^2 + x^2k^2}\left[xk^2(e^a + e^{-a})\sin\left(\frac{kax}{r}\right) + kr(e^a - e^{-a})\sin\left(\frac{kax}{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{9}$$

式中 $r^2 = x^2 + z^2$。显然,具有凹陷振幅的平面光场在传输过程中,随着传输距离的增大而趋于平坦,也就是说,当传输距离 z 很大时,凹陷消失,并且最后成为振幅均匀的平面波。

由以上讨论可以得出结论,真空中定向传播的光束,其衍射从本质上说反映了光振幅在传输过程中是否均匀。

2 真空中衍射的度量

既然衍射反映了光场振幅在传输过程中的均匀程度,就可以以振幅的变化量来标志衍射的大小,假定光场的归一化振幅为 $u(x,y,z)$,沿 z 方向传播,在与光传播方向垂直的截面上相邻的两点 $(x + \Delta x, y, z)$ 与 (x, y, z) 之间的光振幅变化量为

$$P_x(x,y,z) = [u(x + \Delta x, y, z) - u(x,y,z)]/\Delta x = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}$$

同理在 $(x, y + \Delta y, z)$ 与 (x,y,z) 之间有

$$P_y(x,y,z)=[u(x,y+\Delta y,z)-u(x,y,z)]/\Delta y=\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}$$

因此坐标 z 处的衍射度可以用两个方向上变化量的平方和的积分来表示, 即

$$P(z)=\iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \tag{10}$$

2.1　$P(z)$ 是一个大于零的函数, 当它随着坐标 z 的增大而减小, 即光束在传输过程中衍射效应将会变得越来越小, 最终当 $P(z)=0$ 时, 传输光束将变成没有衍射的平面波, 当 $P(z)$ 随着 z 的增大而增大时, 光在传输过程中衍射效应将变得越来越显著, 事实上这种情况在物理上是不会发生的。当 $P(z)$ 是一个不随传输距离而变化的常数时, 光束在传输过程中将保持其最初的发散度, 也就是说不发生衍射现象, 但是如果要保证光束在传输过程中 $P(z)$ 为大于零的常数, 必须维持一定的外界条件, 从而非均匀振幅的平面波在传输过程中总是自然趋于 $P(z)=0$ 的匀幅平面波, 而不会趋于 $P(z)$ 为常数的特殊的无衍射光束。

2.2　邓锡铭为了研究光的传输问题, 发展了光流体模型[6] (HMO), 在其模型中将光场分为径向分量和轴向分量, (10) 式恰好对应了 HMO 中径向分量的内禀能量部分, 反映了光束在传输过程中的不同发散度, 它有如下特点: 随着距离的增加而减小, 最终趋于零。这正好对应了随着传输距离的增大, 光场将趋于振幅均匀的平面波, 而衍射效应趋于零的情况。

2.3　根据所定义的衍射度, 对第 1 节中所给的几种波形分别进行计算得出, 无穷大空间内的等幅平面波的衍射度

$$P(z)=0 \tag{11}$$

具有高斯分布的无穷大空间的非等幅平面波的衍射度

$$P(z)=\frac{4\pi a_0^2 k\sigma_0}{\sqrt{k^2\sigma_0^4+4z^2}} \tag{12}$$

一维有限束宽等幅平面波的衍射度

$$P(z)=\frac{2k^2a^3}{\pi\lambda^3 z}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t^2}\right)^2\mathrm{d}t \tag{13}$$

任意构造的具有凹顶的有限束宽非等幅平面波的衍射度

$$P(z)\sim\frac{D}{z}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cos^2(kax/r)\,\mathrm{d}x+\frac{E}{z}\int_{-\infty}^{\infty}\cos^2\left(\frac{kax}{r}+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x \tag{14}$$

D, E 为常数。从(11) ~ (14) 式可以看出, 随着传输距离的增加, 4 种波形的衍射度最终都趋于零, 也就是说, 在 z 无穷大时, 4 种光场都退化为无衍射的平面波。

2.4　由以上讨论可知, 要使 $P(z)$ 有意义, 在平面波经过狭缝或光阑时, 其边界处的光场振幅就不能发生跃变, 它必须是连续且至少一阶可微的函数, 邓锡铭曾利用 HMO 理论得出一维狭缝和二维圆形光阑透过率的超高斯等价形式[7]

一维狭缝

$$\phi(x)=\sqrt{\frac{n\cdot 2^{1/n}}{2d\Gamma(1/n)}}\exp\left[-\left|\frac{x}{d}\right|^n\right]\qquad n=\frac{4\pi d}{\lambda} \tag{15}$$

圆形光阑

$$\phi(r)=\sqrt{\frac{4^{1/n}}{\pi\sigma^2\Gamma(1+2/n)}}\exp\left[-\left|\frac{r}{\sigma}\right|^n\right]\qquad n=\frac{4\pi d}{\lambda} \tag{16}$$

这说明在通常的处理中, 将光阑的透过函数看成常数只是一种近似, 显然从(15), (16) 式可知,

当光阑的线度远大于波长时，这种近似几乎不会带来任何误差。

3 无衍射光束与衍射的一般表述

邓锡铭在他的 HMO 模型中给出满足无衍射传输的光束的振幅表达式[8]

$$n\nabla n+\frac{1}{2k^2}\nabla\left(\frac{\nabla^2 u}{u}\right)=0 \tag{17}$$

当 n 为常数时，有

$$\nabla^2 u\pm\beta^2 u=0 \tag{18}$$

3.1 (18)式中，β^2 为正的常数。当取正号时，恰好是波动光学理论中的亥姆霍兹方程，即满足亥姆霍兹方程的本征模式光束在传输过程中将不发生衍射。考虑到光束沿 z 方向传输，假定光场振幅不随 z 的变化而变化，很显然一维无限大等幅平面波是它的一个本征模式，故它在传输过程中无衍射，二维有限域内贝塞尔函数也是它的一个本征模式解，故贝塞尔函数在传输过程中也无衍射。当取负号时，有物理意义的解显然是消逝波，虽然也是一种无衍射波，但在此我们不作讨论。

3.2 当 $n\neq$ 常数时，在 n 为缓变的情况下，根据 HMO 理论(17)式实质上是光传输过程中 n 为函数时的波动方程[9]，也就是说，在变化的介质中，满足波动方程的本征模式解的光束，在传输过程中无衍射，有限空间内无衍射光束理论上可以通过改变介质的折射率来实现。

3.3 无衍射光束的判据

由第2节可知，无衍射光束的一个判据是

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}=0 \tag{19}$$

我们可以证明，(19) 式与无衍射判据(18) 式是一致的。考虑 n 为常数时的情形，(18) 式等价于

$$\frac{\nabla_z^2 u}{u}+\left(\frac{\nabla_x^2 u+\nabla_y^2 u}{u}\right)=\text{常数} \tag{20}$$

令

$$u=\Psi(z)\Phi(x,y) \tag{21}$$

可以得到 $\nabla_z^2\Psi/\Psi=$ 常数 >0 时，进一步可以求出 $\Psi(z)$ 为正弦或余弦函数，也就是说，$\Psi(z)$ 只能算光场的相位部分，而振幅部分只有 $\Psi(x,y)$，它不与 z 有关，等价于(19)式。

3.4 衍射的定义

综上所述，可以从本质上给衍射下一个定义，即沿固定方向传播的非波动方程的本征模式光束，在传输的过程中总是趋于某一本征模式光束的特点，称之为衍射。

参 考 文 献

1 Wang Shaomin, Zhao Daomu. Principles of Matrix Optics. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1st, Ed., 1994, Chapt. 2, 29~32 (in Chinese)

2 Lü Baida. Laser Optics——Laser Beam Propagation and Beam Quality Control. Chengdu: Sichuan University Press, 1st, Ed., 1992, Chapt. 1, 2~4 (in Chinese)

3 Lü Baida. Laser Optics——Laser Beam Propagation and Beam Quality Control. Chengdu: Sichuan University Press, 1st, Ed., 1992, Chapt. 4, 146~154 (in Chinese)

4 Deng Ximing. Dynamics of Optical Beams with Finite Beam. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1st, Ed., 1994, Chapt. 2, 50 (in Chinese)

5 D. Marcuse (translated in Chinese by Cheng Xiwang). Transmission Optics. Beijing: People's Tele-communication Press, 1st, Ed., 1987, Chapt. 1, 46~53

6 Deng Ximing. Dynamics of Optical Beams with Finite Beam. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1st,

Ed., 1994, Chapt. 1, 1~ 21 (in Chinese)

7 Deng Ximing. Dynamics of Optical Beams with Finite Beam. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1st, Ed., 1994, Chapt. 2, 22~ 23 (in Chinese)

8 Deng Ximing. Dynamics of Optical Beams with Finite Beam. Hangzhou: Hangzhou University Press, 1st, Ed., 1994, Chapt. 2, 46~ 49 (in Chinese)

9 Deng Ximing, Cao Qing, Guo Hong. The upper limit of the order of the suppergaussian beams. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1996, **A23**(2): 151~ 155 (in Chinese)

Light Diffraction and Diffraction-free Beams

Xie Xinglong　Chen Shaohe　Deng Ximing

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai* 201800)

Abstract Characteristics of light diffraction and diffraction-free beams are analyzed. The criterion to diffraction-free beams is discussed. It is pointed out that light diffraction means a non-eigen solution beam of the wave equation degenerating into an eigen solution beam during propagation.

Key words light diffraction, diffraction-free beam, eigen solution beam

环形腔 Yb 光纤激光器获得 1.053 m 激光输出

我们用国产 Yb 硅光纤研制的激光器获得了 1.053 μm 激光输出。激光器使用环形腔, 用波分复用器把光纤连接而成。波分复用器的隔离比 980 nm/1053 nm= 18 dB。光纤的芯径为 6 μm, 在 920 nm 处的吸收为 6600 dB/km, 截止波长 860 nm, 光纤长度为 9.8 m。泵浦源为输出 100 mW, 波长 980 nm 的半导体激光器。泵浦光经 $f = 3$ mm 的非球面透镜把光束准直成平行光, 再经 10× 显微物镜聚焦耦合进入光纤。

光纤激光器振荡阈值约为 1 mW。当吸收泵浦光功率为 7.1 mW 时, 输出为 104 μW。将泵浦光调制成 3 ms 方波脉冲, 用 PIN 二极管及存储示波器观察激光器输出波形, 发现弛豫振荡类似有阻尼的正弦波。用 WDG-30 光栅单色仪和 GDB-240 光电倍增管, 扫描记录了荧光和激光光谱, 激光谱宽为 5 nm。为了满足放大器的要求, 我们更感光趣的是中心波长为 1.053 μm 的激光。根据公式的推导, 用固定吸收常数的光纤, 激光的输出波长随着光纤长度的增长将向长波移动, 因此改变光纤长度, 实现了 1.053 μm 激光运转。

中国科学院上海光机所
陈兰荣　陈　柏　林尊琪　陈绍和
武汉邮电科学研究院
尹红兵　刘有信
中国科学技术大学
明　海　许立新　谢建平

1998-12-16 收稿