

坐标变换在傅里叶计算全息中的应用

沐仁旺* 周 进 谈苏庆 黄信凡 高文琦

(南京大学物理系 南京 210093)

提要 提出在傅里叶计算全息中, 只要对虚拟物的频谱进行简单的坐标变换, 就可获得虚拟物再现像的旋转、切变和翻转, 阐明了此种坐标变换的原理, 给出了与理论相符合的实验结果。

关键词 计算全息, 傅里叶频谱, 坐标变换

1 引 言

傅里叶计算全息可以再现虚拟物的图像, 其过程是建立虚拟物的数字模型, 通过计算机进行频谱的计算、编码, 然后在输出设备上可获得相应的计算全息图, 再现时, 只要将激光照射到全息图上, 就可以得到虚拟物的再现像。然而在实际应用中, 如匹配、图像识别等^[1,2], 往往需要再现像有些变化, 通常要将原始虚拟物作相应的变化, 再建立数字模型, 经过以上相同的过程, 才可得到变化后的再现像。由于建立数字模型不是很容易, 而且每改变一次都要建立相应的数字模型, 这是相当麻烦的。本文在研究中发现, 在傅里叶计算全息中, 再现像的某些变化, 不需要从建立虚拟物的数字模型开始, 而只需对原物的傅里叶频谱进行简单的坐标变换, 就可实现再现像的一系列的变化, 如翻转、切变和旋转等。

2 原 理

在傅里叶计算全息中, 再现的是虚拟物的像, 当虚拟物的形状发生改变时, 再现像的形状也发生相应的变化, 虚拟物形状的某些变化, 可以看成是坐标变换所引起的。设虚拟物的原函数为 $g(x, y)$, 对应的傅里叶频谱为 $G(\mu, \nu)$, 将 $g(x, y)$ 进行坐标变换(线性), 则变换后的函数形式为 $g(x', y')$ ^[3], 其中 $x' = a_1x + b_1y; y' = a_2x + b_2y$ 。则它的傅里叶频谱 $G'(\mu, \nu)$ 为 $g(x', y')$ 的傅里叶变换

$$G'(\mu, \nu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \exp[-j2\pi(x\mu + y\nu)] dx dy$$

经过两次变量代换, 可得 $G'(\mu, \nu) = \frac{1}{|D|} G\left[\frac{b_2\mu - a_2\nu}{D}, \frac{a_1\nu - b_1\mu}{D}\right]$

其中, $D = a_1b_2 - a_2b_1$ 。

$$\text{令 } \mu' = \frac{b_2\mu - a_2\nu}{D}, \nu' = \frac{a_1\nu - b_1\mu}{D}, \text{ 则 } G'(\mu, \nu) = \frac{1}{|D|} G(\mu', \nu')。$$

* 访问学者(南通师专)。

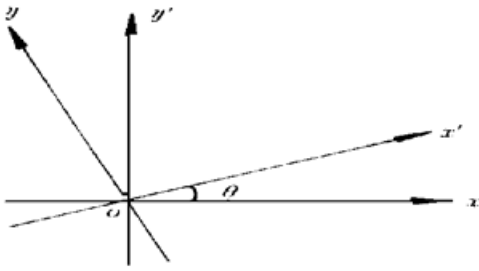


图 1 坐标变换

Fig. 1 The transform of coordinate

可见,对原函数 $g(x, y)$ 进行坐标变换后,相应的频谱也为原傅里叶频谱的坐标变换。因此,当需要再现像发生某些变化时,只需对频谱进行简单的坐标变换就可实现。下面具体分析几种变换情况。

2.1 旋转

设在直角坐标系 oxy 中,虚拟物的原函数为 $g(x, y)$,将其沿逆时针方向旋转 θ 角度后,在新坐标系 $ox'y'$ 中,原函数为 $g(x', y')$,其坐标变换如图 1 所示。变换关系为

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \sin\theta \\ y' = y \cos\theta - x \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_2x + b_2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \cos\theta \\ b_1 = \sin\theta \\ a_2 = -\sin\theta \\ b_2 = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu' = \frac{b_2\mu - a_2\nu}{D} \\ \nu' = \frac{a_1\nu - b_1\mu}{D} \end{cases} \quad \text{其中 } D = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\therefore \begin{cases} \mu' = \mu \cos\theta + \nu \sin\theta \\ \nu' = \nu \cos\theta - \mu \sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore G'(\mu, \nu) = G(\mu', \nu') = G(\mu \cos\theta + \nu \sin\theta, \nu \cos\theta - \mu \sin\theta)$$

可见,当空域中进行逆时针方向旋转 θ 角度的坐标变换后,相当于频域中进行逆时针方向旋转 θ 角度的坐标变换。由此,当傅里叶频谱 $G(\mu, \nu)$ 沿逆时针方向旋转 θ 角度时,其再现像也沿相同方向旋转 θ 角度。

2.2 水平方向与垂直方向的切变

对 $g(x, y)$ 分别在 x, y 方向切变 θ 角度,根据以上类似的讨论有

$$x \text{ 方向切变} \quad \begin{cases} x' = x - y \tan\theta \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu' = \mu \\ \nu' = \nu + \mu \tan\theta \end{cases}$$

$$\therefore G'(\mu, \nu) = G(\mu', \nu') = G(\mu, \nu + \mu \tan\theta)$$

$$y \text{ 方向切变} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + x \tan\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu' = \mu - \nu \tan\theta \\ \nu' = \nu \end{cases}$$

$$\therefore G'(\mu, \nu) = G(\mu', \nu') = G(\mu - \nu \tan\theta, \nu)$$

同理可见,当原函数 $g(x, y)$ 分别在水平和垂直方向切变 θ 角度时, $G(\mu, \nu)$ 分别在垂直和水平方向切变 θ 角度,因此,再现像在水平和垂直方向切变 θ 角度。

由以上的讨论还可知,也可同时在水平和垂直方向切变任意角度。

2.3 上下与左右翻转

对 $g(x, y)$ 分别进行上下和左右翻转,根据 2.1 的讨论有

$$\text{上下翻转} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu' = \mu \\ \nu' = -\nu \end{cases}$$

$$\therefore G'(\mu, \nu) = G(\mu', \nu') = G(\mu, -\nu)$$

$$\text{左右翻转} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu' = -\mu \\ \nu' = \nu \end{cases}$$

$$\therefore G'(\mu, \nu) = G(\mu', \nu') = G(-\mu, \nu)$$

同样可见, 当原函数 $g(x, y)$ 进行上下和左右翻转时, $G(\mu, \nu)$ 也进行上下和左右翻转, 因此, 再现像亦进行上下和左右翻转。

3 实验与结果

根据上述原理, 我们对汉字“光”进行了实验研究, 首先对正常的“光”字建立数字模型, 抽样点为 64×64 , 计算出相应的傅里叶频谱, 运用罗曼编码技术^[4], 在激光打印机上输出计算全息的原图($18.0 \text{ cm} \times 17.5 \text{ cm}$) (如图 2 为计算全息图的一部分), 经缩小 60 倍获得了实际的计算全息图。利用如图 3 所示的光路图(焦距 $f = 90 \text{ cm}$), 得到了正常的“光”字的再现像(如图 4)。

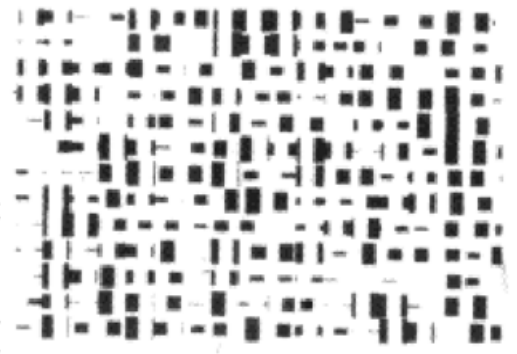


图 2 计算全息图的一部分

Fig. 2 A part of computer generated hologram

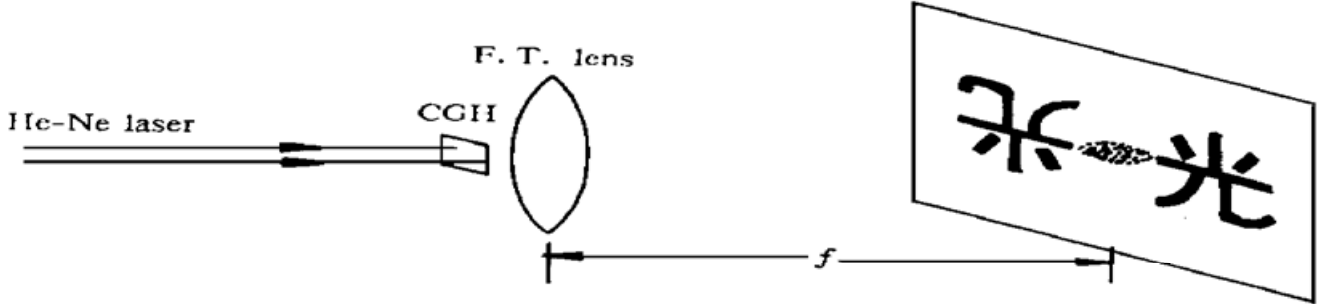


图 3 再现光路图

Fig. 3 Optical setup for reconstruction

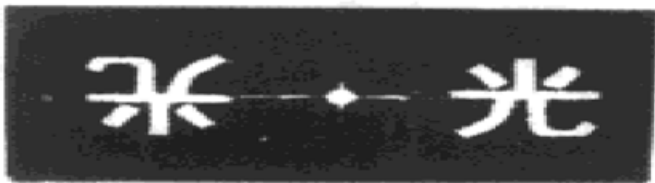


图 4 正常的再现像

Fig. 4 The normal images

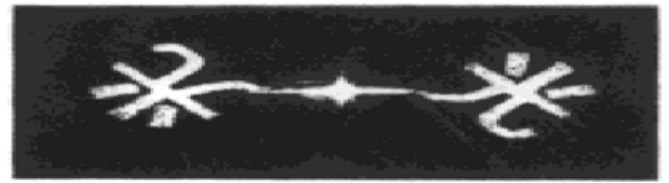


图 5 旋转 45°角后的再现像

Fig. 5 The images after a 45° angle of rotation

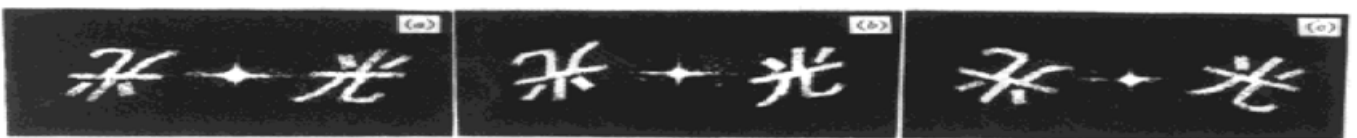


图 6 切变

- (a) 水平方向切变 30° 角后的再现像;
- (b) 垂直方向切变 20° 角后的再现像;
- (c) 水平方向切变 30° 角同时在垂直方向切变 20° 角后的再现像

Fig. 6 Shear

- a) The images after a 30° angle of shear in horizontal;
- b) The images after a 20° angle of shear in the normal direction;
- (c) The images after a 30° angle of shear in horizontal and a 20° angle of shear in the normal direction

为了进行坐标变换,根据坐标变换原理,编写了有关的软件包,输入虚拟物的数据文件,根据实际需要,可输出绘图的数据文件,再用与上述相同的方法,可制作出变换后的全息图,在图3的光路上再现,获得了一些实验结果(见图5~7)。

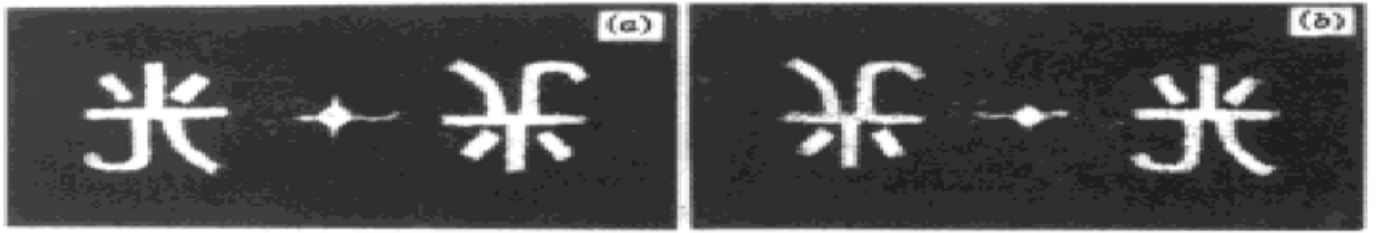


图7 翻转。(a) 上下翻转后的再现像;(b) 左右翻转后的再现像

Fig. 7 Inversion. (a) The images of inversion up and down; (b) The images of inversion left and right

4 结 论

从实验结果来看,基本上达到了预期的目的,图像清晰,效果较好,证明这种方法是可行的,这对计算全息再现像的图像处理是很有益的,特别对完善虚拟物的设计有其独特的灵活性,减少了从数字化到频谱计算的重复过程。如果需再现这些不同形状的像,可以不必抽样这些像对应的各个物,而只需对物进行一次抽样计算频谱,然后用对物谱进行坐标变换的方法,就可得到不同形状的再现像。

致谢 任朝红同志在本课题的前期做了很多工作,特此感谢。

参 考 文 献

- 1 M. W. Farn, J. W. Goodman. Optimal binary phase-only matched filters. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(21): 4431~ 4437
- 2 D. Casasent, W. A. Rozzi. Computer-generated and phase-only synthetic discriminant function filters. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(20): 3767~ 3772
- 3 Jack D. Gaskill. *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*. New York, John Wiley & Sons INC, 1978. 308~ 309
- 4 A. W. Lohmann, D. P. Paris. Binary Fraunhofer holograms, generated by computer. *Appl. Opt.*, 1967, **6**(10): 1739~ 1748

The Application of Coordinate Transformation in Fourier Computer Generated Holograms

Mu Renwang Zhou Jin Tan Suqing Huang Xinfan Gao Wenqi
(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093)

Abstract In this paper, we proposed that virtual images, which have rotation, shear and inversion, can be obtained by a simple coordinate transformation of the Fourier spectrum in the Fourier computer generated Hologram. We clarify the principle of this coordinate transformation. The experimental results are in excellent agreement with a theoretical analysis.

Key words computer holography, Fourier spectrum, coordinate transformation