

# 静电摇摆器自由电子激光器的 高次谐波分析

陈 敏 陈建文 徐至展  
(中国科学院上海光机所 上海 201800)

**提要** 讨论了一种静电摇摆器中电子的自发辐射谱和高次谐波的增益,其形式与平面磁摇摆器中的类似。这种静电摇摆器可由等离子体流波纹产生。当存在轴向静电力时,高次谐波就可能产生。

**关键词** 静电摇摆器,自由电子激光器,高次谐波

## 1 引 言

众所周知在自由电子激光器中摇摆器是产生激光的关键。目前提出了很多新型的摇摆器,但应用最多的摇摆器是静磁摇摆器,包括双螺线摇摆器、线极化摇摆器及混合摇摆器。此外还有各种非静磁摇摆器如电磁波摇摆器、静电摇摆器等。早在 40 多年前 Mote 就指出横向交替的静电场在原理上等同于静磁摇摆器,然而静电摇摆器的一个重要缺陷就是需要极高的电场强度<sup>[1]</sup>,因而一直没有引起人们的兴趣。但是由于工艺的提高以及利用等离子体流波纹产生静电场的实现<sup>[2]</sup>,使得上述缺陷相对变得缓和,同时静电摇摆器亦有其自身的优点,如装置相对简单、易于调节、易于小型化等。另外,在某些方面静电摇摆器要优于静磁摇摆器,如当窄束电子束入射时,可以应用静电摇摆器之间的窄隙来减小  $\lambda_w$ ,因而又开始受到人们的重视<sup>[3]</sup>。本文研究轴向存在电场时静电摇摆器的电子自发辐射谱,并给出谐波小信号增益公式。

## 2 理论分析

### 2.1 自发辐射谱

本文讨论的静电摇摆器结构如图 1 所示,它由等离子体流波纹产生,其静电场可表示为<sup>[3]</sup>

$$E_x = - V(\pi/a) \sin(\pi z/b) \quad (1)$$

$$E_z = - V(\pi/b) \sin(\pi x/a) \cos(\pi z/b) \quad (2)$$

式中  $V$  为常数,利用相对论性电子的洛仑兹方程和能量方程,容易得到电子在此电场中的运动轨迹为

$$x = - x_0 \sin \omega t \quad (3)$$

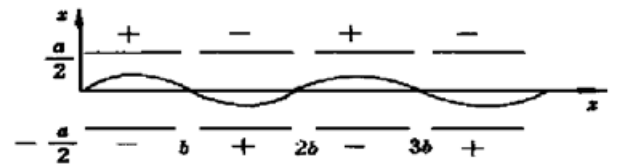


图 1 静电摇摆器及坐标示意图

Fig. 1 The diagram of the electrostatic wiggler and coordinate

$$z = v_{z0}t + (eV\pi/4\gamma mb\omega^2) J_1(\pi x_0/a) \sin 2\omega t \quad (4)$$

相对论性电子的速度为

$$v_x = -\omega x_0 \cos \omega t \quad (5)$$

$$v_z = v_{z0} + (eV\pi/2\gamma mb\omega) J_1(\pi x_0/a) \cos 2\omega t \quad (6)$$

其中  $x_0 = (eVb^2/\gamma m a \pi v_{z0}^2)$  是电子横向运动的振幅,  $v_{z0}$  为电子的初始速度,  $\omega = \pi v_{z0}/b$ ,  $J_1$  是一阶贝塞尔函数。

我们看到, 电子在该静电场中的运动轨迹与电子在静磁场中的运动轨迹在形式上相近。由于存在轴向的静电场, 摇摆器的电场不再是纯正弦周期, 电子的运动轨迹不是纯正弦的, 在  $z$  方向的速度增加了一项  $\cos 2\omega t$ , 因而很容易产生谐波。容易得到共振条件

$$\lambda_r = \lambda_w(1 - \beta_z \cos \theta) = 2b(1 - \beta \cos \theta) \quad (7)$$

式中  $\beta_z = v_z/c$ ,  $\theta$  为观测角。

电子的自发辐射谱由下式给出<sup>[4]</sup>

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} |Q|^2 \quad (8)$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{v}) \exp[i(\omega t - k_s \hat{n} \cdot \vec{r})] dt \quad (9)$$

式中  $\omega$  为辐射场的圆频率,  $k_s = \omega/c$  为辐射场的波数。

由于相对论性电子的自发辐射谱都集中在前向的一个很小的锥角内<sup>[4]</sup>, 故  $\hat{n}$  可表示为

$$\hat{n} \approx (\theta \cos \varphi, \theta \sin \varphi, 1) \quad (10)$$

由式(4), (6), (9), (10) 可得到

$$Q = \frac{x_0 \omega_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \exp \left[ i \frac{\omega + \omega_0}{\omega} \omega t \right] + \exp \left[ -i \frac{\omega - \omega_0}{\omega} \omega t \right] \right] \cdot \exp \left[ i \frac{\omega_0}{\omega} \alpha \sin \omega t \right] \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{\omega} \xi \sin 2\omega t \right] dt \quad (11)$$

将上式的积分变量改为

$$r = t/T$$

其中  $T$  为电子与辐射场相互作用时间, 并将辐射场的频率  $\omega$  表示为

$$\omega = N\omega_0 + \delta\omega \quad (12)$$

式中  $N$  为谐波阶数,  $\delta\omega$  为失谐量, 则(11) 式可改写为

$$Q = x_0 \pi x_0 N_0 \int_0^1 d\tau \left[ \exp \left[ i \left[ N + 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right] 2\pi N_0 \tau \right] + \exp \left[ i \left[ N - 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right] 2\pi N_0 \tau \right] \right] \cdot \exp \left[ i \frac{\omega_0}{\omega} \alpha \sin(2\pi N_0 \tau) \right] \cdot \exp \left[ -i \frac{\omega_0}{\omega} \xi \sin(4\pi N_0 \tau) \right] dt \quad (13)$$

式中  $N_0$  为摇摆器的周期数, 而

$$\alpha = \frac{\omega_0 x_0 \theta \cos \varphi}{c(1 - \beta_z \cos \theta)} \quad \xi = \frac{eV\pi J_1(\pi x_0/a)}{4\gamma_0 m b v_0^2 c(1 - \beta_z \cos \theta)}$$

最后得到相对论性电子的自发辐射谱为

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^2 x_0^2 \pi N_0}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} K_N \left[ \frac{\sin(\pi N_0 \delta\omega/\omega_0)}{\pi N_0 \delta\omega/\omega_0} \right]^2 \quad (14)$$

$$K_N = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_l(N\alpha) J_n(N\xi) (\delta_{N+1, 2n-l} + \delta_{N-1, 2n-l}) \quad (15)$$

将上式与平面静磁摇摆器中电子的自发辐射谱比较,发现两者有共同的因子 $(\sin\chi/\chi)^2$ ,所不同的只是耦合系数 $K_N$ ,因此对于本文所述的电子自发辐射谱的一些基本性质亦类似于平面静磁摇摆器中电子的自发辐射谱。

## 2.2 小信号增益

下面计算相对论性电子的小信号增益,相对论性电子的能量方程为

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} = - \frac{e}{mc^2} \vec{v} \cdot \vec{E} \quad (16)$$

假定辐射场可表示成

$$\vec{E} = E_0 \cos(f\omega t - f k z + \phi) \hat{x} \quad (17)$$

式中, $f$ 为谐波阶数, $\omega = kc$ 为辐射场的基波频率, $\phi$ 为任意的初始位相。电子在 $z$ 轴的运动轨迹为

$$\begin{aligned} z &= z_0 + z' \\ z_0 &= v_z t \\ z' &= (eV\pi/4\gamma m b \omega^2) J_1(\pi x_0/a) \sin 2\omega t = (\eta/k) \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (18)$$

将式(4),(18)代入(16)式,得到

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} = \frac{eE_0 x_0 \omega}{2mc^2} \{ \cos[f\zeta + \phi - (f-1)\omega t + f k z'] + \cos[f\zeta + \phi - (f+1)\omega t + f k z'] \} \quad (19)$$

对上式在一个电场周期内求平均,得到

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dt} = \frac{eE_0 x_0 \omega}{2mc^2} k_f \cos(f\zeta + \phi) \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} k_f &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \cos[(f-1)\theta - f k z'] + \cos[(f+1)\theta - f k z'] \} d\theta = \\ & J_{(f-1)/2}(f\eta) + J_{(f+1)/2}(f\eta) \\ \theta &= \omega t, \quad \varphi = k z_0 + (\omega - \omega) t \end{aligned}$$

应用文献[5]的方法,很容易得到其小信号增益为

$$G = G_0 k_f^2 [1 - (1/2) \cos(f\eta) - (f\eta/2) \sin(f\eta)] \quad (21)$$

上式中

$$G_0 = \frac{e^2 x_0^2 \omega^2}{4\epsilon_0 m c^2 \gamma^3 f^3 v^3} \quad v = kv_z + (\omega - \omega)$$

和平面磁摇摆器中的谐波增益相比,发现增益公式的形式完全一样,只是系数不同,这是可以理解的,因为增益取决于电子的运动轨迹。

## 3 结 论

静电摇摆器由于其振荡周期可达到亚毫秒量级,容易实现短波长辐射,目前得到了人们的重视。我们讨论了在考虑了轴向静电场情况下的电子自发辐射谱,并得到了高次谐波的小信号增益公式,结果表明当存在轴向电场时,完全可以产生高次谐波,其自发辐射谱和谐波的增益公式形式与平面磁摇摆器的类似。本文讨论的轴向静电场是由等离子体波纹产生的,且谐波

的增益与轴向静电场的振幅有关。

### 参 考 文 献

- 1 T. C. Marshall. Free-electron Laser. Macmillan, 1985
- 2 Yasuo Suzuki. Conceptual design of a plasma undulator. *Nucl. Instr. and Meth.*, 1993, **A331**(1~ 3) : 684~ 688
- 3 A. Murai, K. Mima, S. Kuruma *et al.*. Electrostatic microwiggler FEL. *Nucl. Instr. and Meth.*, 1993, **A331** : 680~ 683
- 4 J. D. Jackson. Classical electrodynamics. Beijing : People's Education Press, 1979. 372
- 5 Runwen Wang, Dake Zhang, J. C. Chen. A simple method for calculating the FEL energy transfer rate. *Opt. Commun.*, 1985, **55**(6) : 430~ 434

## Analysis of Higher Harmonics for FEL with a Novel Electrostatic Wiggler

Chen Min    Chen Jianwen    Xu Zhizhan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

**Abstract** The spontaneous emission spectrum and higher harmonic gain of a relativistic electron in a novel electrostatic wiggler are discussed. The results forms are similar to those in the linear polarized magnet wiggler. It should be pointed out that when there exists an axial electrostatic field, the higher harmonics may be generated.

**Key words** electrostatic wiggler, free electron laser, harmonic