

傍轴黎曼几何光学应用——光束自聚焦

陈惠龙 曹 清 李学春 邓锡铭

(中国科学院上海光机所高功率激光物理国家实验室 上海 201800)

提要 利用光流体模型, 计算模拟了激光束的自聚焦传输特性, 得到与实验相一致的结果。

关键词 光束传输, 自聚焦, 光流体模型

1 引 言

光束的自聚焦现象从被发现至今, 一直是人们非常感兴趣的非线性光传播问题。几何光学仅以光线为基础来研究光的传播规律及成像问题, 解决不了光的能量传播问题, 无法描述自聚焦的过程; 波动光学以无像差近似(傍轴近似)方法来研究, 它假设高斯光束在自聚焦过程中光场振幅分布形状是不变的, 从而可给出自聚焦临界光强及自聚焦长度^[1]。

邓锡铭等人以光流体模型(HMO)为基础, 建立并发展了傍轴黎曼几何光学^[2-4], 用于描写傍轴光束的稳态传输。它基于麦克斯韦的电磁理论, 将光束传输的几何光学特征和波动光学特征统一在一种模型中进行研究。本文利用这一理论模型对光束自聚焦的传输变化进行了研究。

2 基本原理

在直角坐标系中, 可将单色标量光场表示为

$$\Phi = \Phi_0(x, y, z) \exp(ikL)$$

其中 kL 为位相, L 为准程函, Φ_0 为光场振幅。设光束传输轴为 z 轴, 由微分学概念可知当激光束从一个截面 z 传输到另一截面 $(z + dz)$ 时, 光场振幅 Φ_0 的增量可表示为

$$d\Phi_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} dy = \left[\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right] dz \quad (1)$$

记 $\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x} + e_2 \frac{\partial}{\partial y} + e_3 \frac{\partial}{\partial z}$, 其中 e_1, e_2, e_3 分别为直角坐标系 (xyz) 的单位方向矢量。由 HMO 的基本理论, $\nabla L / |\nabla L|$ 代表流体的速度方向矢量, 也就是流体流线的方向, 流线与电磁场的衍射光线处处重合。而流线的三个速度分量可写为

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

由微分学概念可知

$$\frac{v_x}{v_z} = \frac{dx}{dz} = \frac{\nabla_x L}{\nabla_z L} \quad \frac{v_y}{v_z} = \frac{dy}{dz} = \frac{\nabla_y L}{\nabla_z L}$$

其中 $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$ 。

由 HMO 的基本方程

$$\nabla^2 L = -2 \frac{\nabla \Phi_0 \cdot \nabla L}{\Phi_0}$$

可得

$$\nabla \Phi_0 \cdot \nabla L = -\frac{\Phi_0}{2} \nabla^2 L$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 所以(1)式可写为

$$d\Phi_0 = \left[-\frac{\Phi_0}{2} \nabla^2 L \right] \frac{dz}{\nabla_z L} \quad (2)$$

同样, 准程函 L 的变化量可表示为

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial L}{\partial z} \right] dz = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\nabla_x L}{\nabla_z L} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\nabla_y L}{\nabla_z L} + \frac{\partial L}{\partial z} \right] dz = (\nabla L)^2 \frac{dz}{\nabla_z L} \end{aligned}$$

由 HMO 基本方程

$$(\nabla L)^2 = n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0}$$

可得

$$dL = \left[n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right] \frac{dz}{\nabla_z L} \quad (3)$$

其中 n 为介质的光折射率。

相应地, 光束由一个截面 z 传输到临近截面($z + dz$) 时, 光束截面上各相应的坐标点的改变为

$$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

其中

$$z_2 = z_1 + dz \quad (4)$$

$$x_2 = x_1 + dx = x_1 + \frac{dx}{dz} dz = x_1 + \frac{\nabla_x L}{\nabla_z L} dz \quad (5)$$

$$y_2 = y_1 + dy = y_1 + \frac{\nabla_y L}{\nabla_z L} dz \quad (6)$$

在傍轴条件下, 有 $\nabla_z L = n$, 所以光束由截面 1(截面 z) 传输至截面 2(截面 $z + dz$) 时, 光束截面上各点的光场振幅、准程函、坐标位置的相应变化为

$$\begin{cases} d\Phi_0 = -\frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_0 \nabla^2 L}{n} \right]_1 dz \\ dL = \left[n + \frac{1}{nk^2} \frac{\nabla^2 \Phi_0}{\Phi_0} \right]_1 dz \\ z_2 = z_1 + dz \\ x_2 = x_1 + \left[\frac{\nabla_x L}{n} \right]_1 dz \\ y_2 = y_1 + \left[\frac{\nabla_y L}{n} \right]_1 dz \end{cases} \quad (7)$$

方程组(7)等式右边的脚标 1 代表截面 1 上的值。

至此,只要给定任何截面上的光场(振幅、位相)分布,即可由方程组(7)出发进行激光束的传输计算。

3 计算及结果分析

3.1 算法的选择及其准确性检验

利用方程组(7)进行传输计算的关键,是如何精确求出一阶、二阶数值导数,因为在实际中对于一个光束我们能够知道的只是其振幅(位相)的离散空间分布点 $\mathcal{Q}(x_i)$ 。考虑到振幅、位相一般是连续的比较平滑的函数分布,可构造一连续函数 $\Phi(x)$,使得 $\Phi(x_i) = \mathcal{Q}(x_i)$;知道了 $\Phi(x)$,即可轻易求得其所相应的一阶和二阶导数。在有限闭区间内的任一连续函数,都可以用多项式逼近至任意精确程度;至于比较平滑的函数,利用分段多项式来逼近无论在数学上还是在物理上都更合理些^[5]。因而在此我们采用实际中最常用的分段函数——三次样条函数方法来计算数值导数。

取步长 $dz = 0.1 \text{ mm}$,光腰半径为 1 mm 的高斯光束在真空中 ($n = 1$) 传输 300 mm 时,由方程组(7)出发计算所得的光场振幅的一阶、二阶导数值与理论值(解析解)的误差不超过 0.1% ,而光场位相的一阶、二阶导数的误差也小于 1% ,如图 1 所示。这表明我们所用的算法、程序是合适的、精确的。

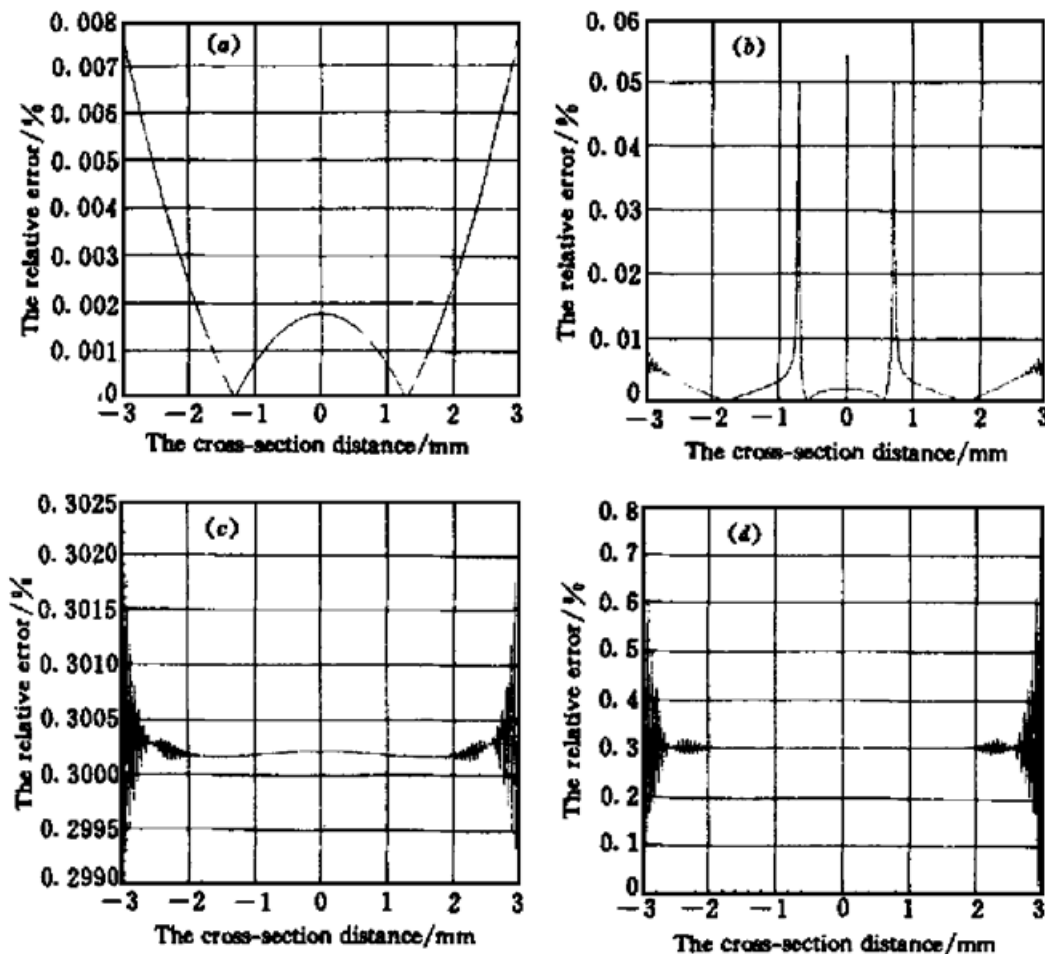


图 1 相对误差

Fig. 1 The relative error of (a) $d\Phi_0/dx$; (b) $d^2\Phi_0/dx^2$; (c) dL/dx ; (d) d^2L/dx^2

3.2 高斯光束的非线性传输 折射率

$$n = n_0 + \frac{1}{2} n_2 \Phi_0^2$$

其中, $n_0 = 1.532$ 为玻璃的光折射率; 玻璃的非线性系数

$$n_2 = 1.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ v}^{-2} (= 1.53 \times 10^{-13} \text{ esu})$$

这对应于电致伸缩非线性情况^[6]。

取步长 $dz = 0.1 \text{ mm}$, 高斯光束的光腰半径 $\sigma_0 = 1 \text{ mm}$, 为方便计, 可以光腰面为初始截面, 则 $L = 0$, 当光束在非线性介质中传输至振幅峰值附近出现明显的次极大值时即停止传输计算。典型的一维光场振幅在不同传输截面上的分布如图 2 所示。可明显看出, 随着传输距离的增加, 振幅分布越来越陡峭, 其形状已远非高斯分布, 并且在中心点(极大值)附近有两个次极大值出现; 其自聚焦的三维振幅分布如图 3 所示, 为使中心的尖峰明显, 我们在 x 轴和 y 轴附近取更密的点分布, 从图中可明显看到次极大环的存在。已有热自聚焦的实验结果显示, 自聚焦的输出光强分布有次极大环的存在, 并将之归因于像差^[1]。就

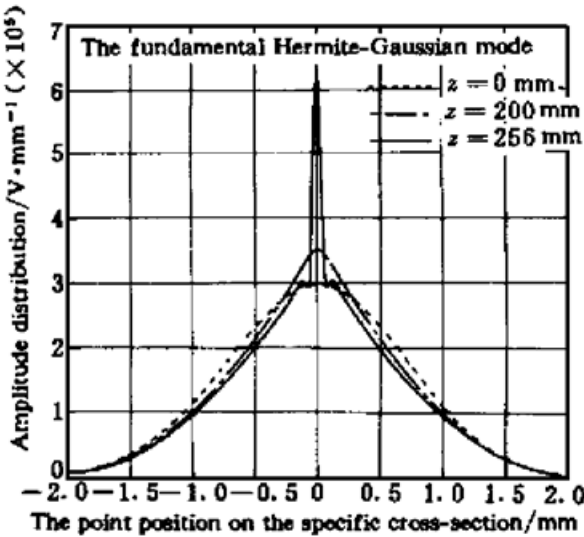


图 2 高斯光束的自聚焦传输

Fig. 2 Self-focusing of light beam with a Gaussian shape of the amplitude profile

传输而言, 不同效应引起的自聚焦效果是一样的, 因而在我们的计算中是会有次极大环出现的, 不妨也将之归因于像差, 只不过是由不同的非线性效应(热效应、电致伸缩效应等)引起的。

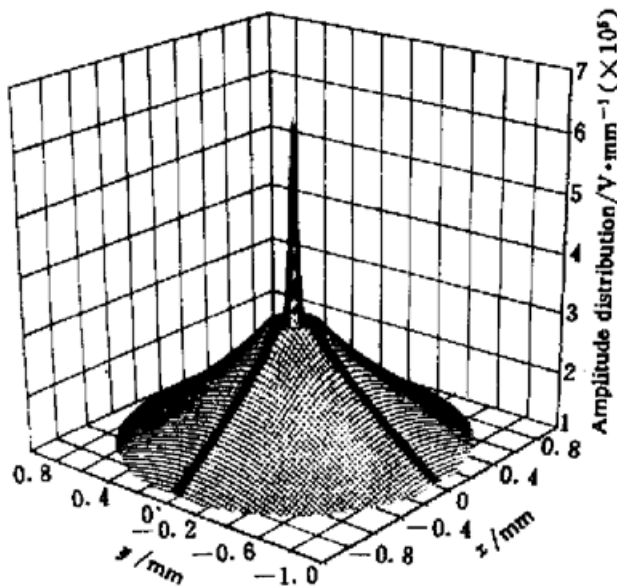


图 3 高斯光束自聚焦的三维图

Fig. 3 Self-focusing: the Gaussian mode

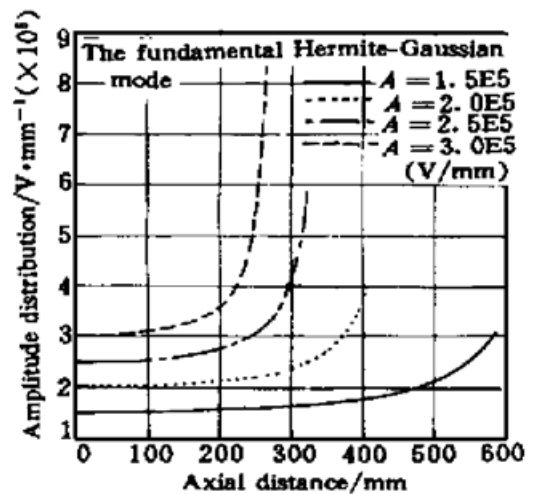


图 4 中心振幅的变化

Fig. 4 The amplitude value of peak point

同样高斯分布而光场振幅峰值不同的入射光束, 它们的中心点(极值点)的光场振幅随传输距离的变化如图 4 所示, 同上, 以出现明显的次极大值为判据而结束传输计算。可见初始光

强的大小对自聚焦长度的影响很大;而且自聚焦一旦开始,则中心光强将在很短的传输距离内快速增长,这与 Kelley 等人的数值结果^[7]是一致的。

初始振幅峰值一样但变化率不一样的两束光,在传输过程中其自聚焦的快慢是明显不同的,如图 5 所示。图中的两条曲线的初始振幅分布分别是由公式 $\Phi_0 = A \exp(-2x^2)$ 及 $\Phi_0 = A \exp(-x^2)$ 而产生的,初始位相均为零;光束的中心(极值)振幅随传输距离的变化分别对应于图中的曲线 1 及曲线 2,这种情形与 HMO 的理论是一致的。

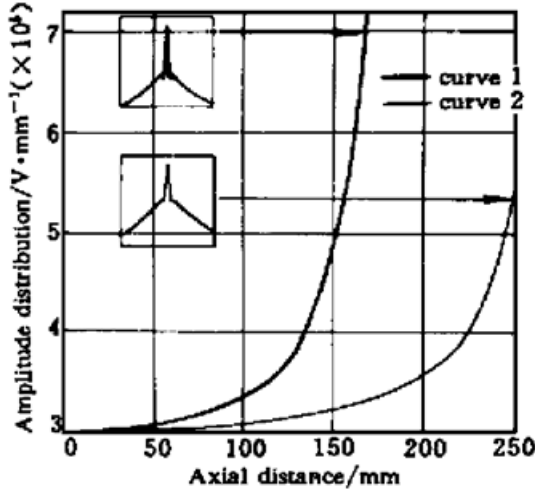


图 5 初始振幅分布对自聚焦的影响

Fig. 5 The effect of initial amplitude distributions on self-focusing

curve 1: $\Phi_0 = A \exp(-2x^2)$; curve 2: $\Phi_0 = A \exp(-x^2)$

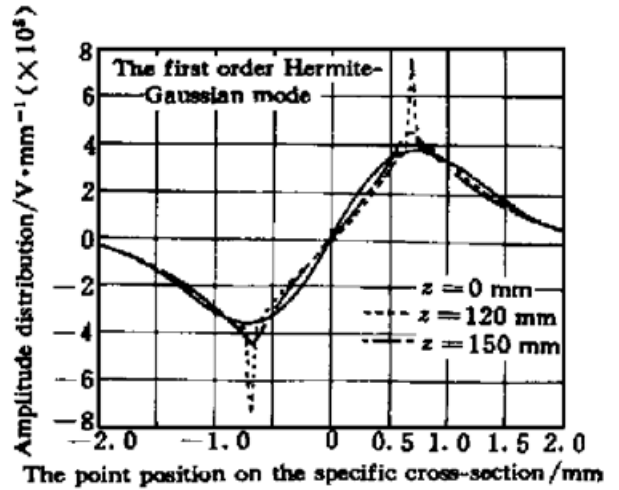


图 6 一阶厄米-高斯光束的自聚焦传输

Fig. 6 Self-focusing of light beam with the first order Hermite-Gaussian shape of amplitude profile

3.3 厄米-高斯光束的传输

以一阶厄米-高斯光束为例,一维情况下其光场振幅在传输截面上的分布如图 6 所示。峰值(两个)附近的两个次极大值是不一样的,这与初始光场振幅峰值两边的振幅变化率不一样是相对应的。

4 应用讨论

任意给定一个截面上的光场振幅、位相分布,即可从方程组(7)出发,计算光束在介质中的传输变化情况;特别是对强激光束在折射率非均匀分布介质中的自聚焦传输进行简单有效的计算模拟,这是 HMO 方法最具优势的方面。另外,在计算中我们并没有特意引入像差的影响,而是从 HMO 的基本方程出发,自然地演绎了与实验结果相符合的自聚焦结果——存在着非线性而引起的像差效应,即有次极大光环出现,这是合乎意料的,也证明了采用 HMO 方法描述自聚焦过程的有效和准确性。

光束在非线性介质中传输时,入射光场的强度及振幅分布的斜率对自聚焦的影响很大,特别是振幅分布的斜率,它更直接地影响着折射率的不均匀分布,使自聚焦变得更加容易。

一旦像差效应引起的光强(振幅)次极大值出现,自聚焦效应已非常明显,峰值光强(振幅)将快速增长,以至于无穷大。这是我们计算中在出现了明显的光场振幅的次极大值后即停止传输计算的原因。

利用此方法进行光束传输模拟时,重要的是解决好数值求导数的问题。从图 1 可看出,边界处的误差较大,所以选取适当的边值条件是准确模拟光束自聚焦传输的关键。本方法也可知道光束自聚焦的阈值光强及自聚焦长度,但无法预知光束自聚焦的焦斑大小及其后的散焦现象。

参 考 文 献

- 1 Edit by F. T. Arecchi, E. O. Schulz-Dubois. Laser Handbook. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1972. 2 : 1158
- 2 Deng Ximing. Dynamics of optical beam with finite beam width. Hangzhou : Hangzhou University Press, 1993. 1~ 12 (in Chinese)
- 3 Deng Ximing, Guo Hong, Cao Qing. Paraxial Riemannian geometrical optics. 一. Theory. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1995, **A22**(7) : 523~ 528 (in Chinese)
- 4 Deng Ximing, Guo Hong, Cao Qing. Paraxial riemannian geometrical optics. 二. Basic applications. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1995, **A22**(8) : 607~ 613 (in Chinese)
- 5 Department of applied mathematics of Tsinghua University. Handbooks of modern applied mathematics (Computing methods). Beijing : Beijing Press, 1990. 55~ 66 (in Chinese)
- 6 Fan Qikang, Wu Cunkai, Mao Shaoqing. Nonlinear Optics. Nanjing : Publishing House of Jianshu Science & Technology, Publishing House of Electronic Industry. 1989. 97 (in Chinese)
- 7 P. L. Kelley. Self-focusing of optical beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **15** : 1005; E. L. Dawes, J. H. Marburger. Computer studies in self-focusing. *Phys. Rev.*, 1969, **179**(3) : 862~ 868

Application of Paraxial Riemannian Geometrical Optics: Self-focusing of Light Beams

Chen Huilong Cao Qing Li Xuechun Deng Ximing

(National Laboratory of High Power Laser Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800)

Abstract Base on the HMO (hydrodynamic model of optics), self-focusing propagation properties are simulated by numerical calculations. The results agree well with the experiment.

Key words beam propagation, self-focusing, HMO