

## 4 阶二元光学元件制作误差的解析分析\*

徐 平\*\* 李景镇 卜桂学  
(深圳大学应用物理系 深圳 518060)

唐继跃 郭履容 郭永康  
(四川大学信息光学研究中心 成都 610064)

**提要** 根据标量衍射理论,提出了 4 阶二元光学元件制作误差对衍射效率影响的解析表达式,对此解析公式展开了讨论,并与计算机模拟结果进行了比较,两者吻合得很好,且与实验结果基本符合。

**关键词** 二元光学,制作误差,衍射效率,解析分析

### 1 引 言

二元光学元件表面的台阶数(即相位等级)为  $N = 2^n$ ,  $n$  是套刻掩模的个数。其制作过程一般分为三步:第一,  $n$  个掩模的设计与制作;第二,图形转印(光刻胶上曝光)与片基刻蚀;第三,大量复制。其中第二步对  $n$  个掩模需套刻  $n$  次(如图 1)。因此,二元光学元件制作质量的优劣关键取决于第二步套刻过程。在实际制作二元光学元件时,由于套刻而带来的各种误差对元件质量影响情况比较复杂,各次套刻时会产生不同的蚀刻深度误差与对位误差。而在目前较少的几篇文献中对该问题只作过简单的讨论。鉴于这种情况和制作元件的需要,本文对一般二元光学元件展开了解析分析,导出了 4 阶二元光学元件深度误差和对位误差对衍射效率影响的解析表达式,从而可以对二元光学元件进行衍射效率与制作误差关系的定量研究。本文还对这个解析公式展开了讨论,并与我们完成的计算机模拟的结果<sup>[1,2]</sup>进行了比较,两者吻合得很好,且与实验结果基本符合。这些研究结果对于制作二元光学元件具有重要的指导意义。

### 2 解析公式推导

当一列平面波垂直入射到一个复振幅透过率为  $f(x)$  ( $|f(x)| \leq 1$ ), 周期为  $T$  的光栅上时,第  $k$  级的衍射效率为

$$\eta_k = \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T f(x) \cdot e^{-2\pi j k x / T} \cdot dx \right|^2 \quad (1)$$

该推论的证明参见文献[3]。

二元光学元件的制作过程如图 1 所示。为了简单起见,这里以 4 阶闪耀光栅为例,推导二元光学元件制作误差对衍射效率影响的解析公式。如图 2 所示,(a)图是没有制作误差时 4 阶

\* 国家自然科学基金和湖北省教委青年基金资助项目。

\*\* 原在湖北民族学院电气工程与应用物理系。

收稿日期: 1996—12—31; 收到修改稿日期: 1997—06—23

闪耀光栅的标准槽形, (b) 图是发生对位误差和深度误差的情形。

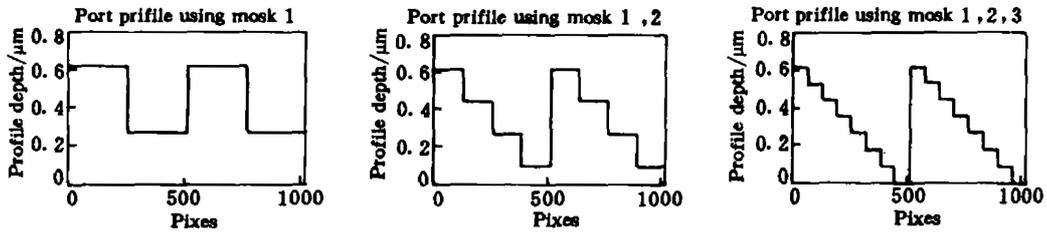


图 1 8 阶二元光学元件制作过程

Fig. 1 Fabrication processes of 8-level binary optical elements

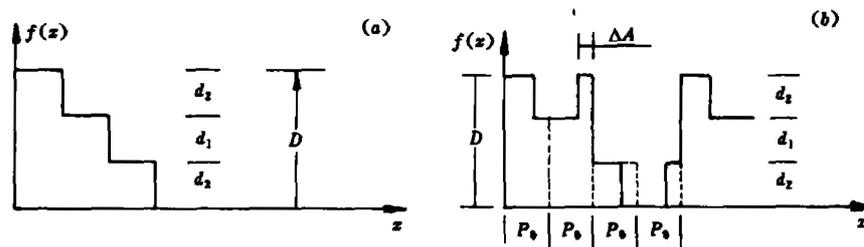


图 2 4 阶闪耀光栅制作误差分析

Fig. 2 Fabrication error analysis of a 4-level blazed grating

在图 2 (a) 中,  $d_1 = d_2 = d_0$ ,  $D = D_0$ , 其中  $d_0$  是每个台阶的标准深度,  $D_0$  是总的浮雕深度。设使用的光波波长为  $\lambda$ , 材料的折射率为  $n$ , 台阶数为  $N$  ( $N = 4$ ), 则有

$$d_0 = \lambda / [N(n - 1)] \quad (2)$$

$$D_0 = (N - 1)\lambda / [N(n - 1)] = (N - 1)d_0 \quad (3)$$

在图 2 (b) 中, 设第一次刻蚀时产生  $\Delta d_1$  的绝对深度误差 (这时没有对位误差), 第二次套刻时产生绝对深度误差和对位误差分别为  $\Delta d_2$  和  $\Delta A$ , 令

$$\delta d_1 = \Delta d_1 / D_0, \quad \delta d_2 = \Delta d_2 / D_0, \quad \delta A = \Delta A / (4P_0) \quad (4)$$

并利用 (2) 和 (3) 式, 则

$$d_1 = d_0 + \Delta d_1 - \Delta d_2 = [1 + (N - 1)(\delta d_1 - \delta d_2)] \cdot \lambda / [N(n - 1)] \quad (5)$$

$$d_2 = d_0 + \Delta d_2 = [1 + (N - 1)\delta d_2] \cdot \lambda / [N(n - 1)] \quad (6)$$

根据位相和光程的关系式  $\Phi = 2\pi(n - 1) \cdot \Delta L / \lambda$ , 利用上面两式, 可以得到图 2 (b) 中四个台阶的位相分别为

$$\Phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1) \cdot (2d_2 + d_1) = \frac{2\pi}{N}[N - 1 + (N - 1)(\delta d_1 + \delta d_2)] \quad (7)$$

$$\Phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1) \cdot (d_2 + d_1) = \frac{2\pi}{N}[N - 2 + (N - 1) \cdot \delta d_1] \quad (8)$$

$$\Phi_3 = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1) \cdot d_2 = \frac{2\pi}{N}[N - 3 + (N - 1) \cdot \delta d_2] \quad (9)$$

$$\Phi_4 = 0 \quad (10)$$

由此, 可以写出该浮雕光栅的位相透过率函数为

$$\begin{aligned}
f(x) = & \operatorname{rect}\left(\frac{x - (P_0 - \Delta A)/2}{P_0 - \Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_1} + \operatorname{rect}\left(\frac{x - (P_0 - \Delta A) - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_2} + \\
& \operatorname{rect}\left(\frac{x - P_0 - (P_0 - \Delta A)/2}{P_0 - \Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_2} + \operatorname{rect}\left(\frac{x - P_0 - (P_0 - \Delta A) - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_1} + \\
& \operatorname{rect}\left(\frac{x - 2P_0 - (P_0 - \Delta A)/2}{P_0 - \Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_3} + \operatorname{rect}\left(\frac{x - 2P_0 - (P_0 - \Delta A) - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_4} + \\
& \operatorname{rect}\left(\frac{x - 3P_0 - (P_0 - \Delta A)/2}{P_0 - \Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_4} + \operatorname{rect}\left(\frac{x - 3P_0 - (P_0 - \Delta A) - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\phi_3} \quad (11)
\end{aligned}$$

令  $P = P_0 - \Delta A$ , 将上式中第一与第五、第二与第六、第三与第七、第四与第八项分别合并, 得到  $f(x)$  为四项之和,

$$\begin{aligned}
f(x) = & \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - m \cdot 2P_0 - P/2}{P}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1-2m+(N-1) \cdot [(1-m)\delta d_1 + \delta d_2])} \right\} + \\
& \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - P - 2mP_0 - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(1-m) \cdot [N-2+(N-1) \cdot \delta d_1]} \right\} + \\
& \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - (2m+1)P_0 - P/2}{P}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(1-m) \cdot [N-2+(N-1) \cdot \delta d_1]} \right\} + \\
& \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - P - (2m+1)P_0 - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1-2m+(N-1) \cdot [\delta d_1 \cdot (1-m) + \delta d_2])} \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

将上式代入一般周期物衍射复振幅公式(1)式, 先求出衍射复振幅, 即

$$U_k = \frac{1}{4P_0} \int_0^{4P_0} f(x) \cdot e^{-i2\pi xk/(4P_0)} dx = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV} \quad (13)$$

下面先分别计算上式中的 I, II, III, IV 四项的值。

$$\text{I} = \frac{1}{4P_0} \int_0^{4P_0} \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - m \cdot 2P_0 - P/2}{P}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1-2m+(N-1) \cdot [(1-m)\delta d_1 + \delta d_2])} \right\} \cdot e^{-i2\pi xk/(4P_0)} dx$$

$$\text{II} = \frac{1}{4P_0} \int_0^{4P_0} \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - P - 2mP_0 - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(1-m) \cdot [N-2+(N-1) \cdot \delta d_1]} \right\} \cdot e^{-i2\pi xk/(4P_0)} dx$$

$$\text{III} = \frac{1}{4P_0} \int_0^{4P_0} \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - (2m+1)P_0 - P/2}{P}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(1-m) \cdot [N-2+(N-1) \cdot \delta d_1]} \right\} \cdot e^{-i2\pi xk/(4P_0)} dx$$

$$\text{IV} = \frac{1}{4P_0} \int_0^{4P_0} \sum_{m=0}^1 \left\{ \operatorname{rect}\left(\frac{x - P - (2m+1)P_0 - \Delta A/2}{\Delta A}\right) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1-2m+(N-1) \cdot [\delta d_1 \cdot (1-m) + \delta d_2])} \right\} \cdot e^{-i2\pi xk/(4P_0)} dx$$

利用下面的 Fourier 变换和级数求和公式,

$$\mathcal{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = a \cdot \operatorname{sinc}(a \cdot f_x), \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sinc}(\pi x)}{\pi x},$$

$$\sum_{m=0}^1 e^{-ix} = \frac{1 - e^{-i2x}}{1 - e^{-ix}} = 2 \cdot e^{-ix/2} \cdot \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

分别对前面的四式进行化简计算, 可以得到

$$\text{I} = M(\delta A) \cdot U_1(\delta d_1) \cdot e^{i\pi k \delta A} \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[N-2+(N-1) \cdot \delta d_1/2 + (N-1)\delta d_2 - 3k/2]} \quad (14)$$

$$\text{II} = V(\delta A) \cdot U_2(\delta d_1) \cdot e^{i\pi k \cdot \delta A} \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2 + (N-1) \cdot \delta d_1/2 - 2k]} \quad (15)$$

$$\text{III} = M(\delta A) \cdot U_2(\delta d_1) \cdot e^{i\pi k \delta A} \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2 + (N-1) \cdot \delta d_1/2 - 5k/2]} \quad (16)$$

$$\text{IV} = V(\delta A) \cdot U_1(\delta d_1) \cdot e^{i\pi k \delta A} \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[N-2 + (N-1) \cdot \delta d_1/2 + (N-1) \delta d_2 - 3k]} \quad (17)$$

由以上四式代入(13)式,并进行合并计算,从而求出衍射复振幅为

$$U_k = (\text{I} + \text{IV}) + (\text{II} + \text{III}) = e^{i\pi k \delta A} \{ [M(\delta A) \cdot e^{-i3\pi k/N} + V(\delta A) \cdot e^{-i6\pi k/N}] \cdot U_1(\delta d_1) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[N-2 + (N-1) \cdot \delta d_1/2 + (N-1) \delta d_2]} + [V(\delta A) \cdot e^{-i4\pi k/N} + M(\delta A) \cdot e^{-i5\pi k/N}] \cdot U_2(\delta d_1) \cdot e^{i\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2 + (N-1) \cdot \delta d_1/2]} \} \quad (18)$$

由此再化简,从而得到衍射效率为

$$\eta = |U_k|^2 = U_k \cdot U_k^* = U_1^2 [M^2 + V^2 + 2M \cdot V \cdot \cos(3\pi k/N)] + U_2^2 [M^2 + V^2 + 2M \cdot V \cdot \cos(\pi k/N)] + 2U_1 U_2 [2M \cdot V \cdot U_3 \cos(\pi k/N) + M^2 \cdot U_4 + V^2 \cdot U_5] \quad (19)$$

此式即是所要推导的 4 阶二元光学元件有制作误差时的衍射效率公式。其中  $M, V, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$  分别为

$$M(\delta A) = 2(1/N - \delta A) \cdot \text{sinc}[(1/N - \delta A)k] \quad (20)$$

$$V(\delta A) = 2\delta A \cdot \text{sinc}(k\delta A) \quad (21)$$

$$U_1(\delta d_1) = \frac{\text{sinc}\left\{\frac{4}{N}[k+1+(N-1)\delta d_1/2]\right\}}{\text{sinc}\left\{\frac{2}{N}[k+1+(N-1)\delta d_1/2]\right\}} \quad (22)$$

$$U_2(\delta d_1) = \frac{\text{sinc}\left\{\frac{2}{N}[2k+N-2+(N-1)\delta d_1]\right\}}{\text{sinc}\left\{\frac{1}{N}[2k+N-2+(N-1)\delta d_1]\right\}} \quad (23)$$

$$U_3(\delta d_2) = \cos\left\{\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2+(N-1)\delta d_2]\right\} \quad (24)$$

$$U_4(\delta d_2) = \cos\left\{\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2+k+(N-1)\delta d_2]\right\} \quad (25)$$

$$U_5(\delta d_2) = \cos\left\{\frac{2\pi}{N}[(N-2)/2-k+(N-1)\delta d_2]\right\} \quad (26)$$

现对上式进行一些讨论。

(1) **理想情形** 此时  $k = -1, \delta A = \delta d_1 = \delta d_2 = 0$ , 从而  $V = U_3 = 0, U_5 = -1, U_1 = U_2 = U_4 = 1$ , 代入(19), 得

$$\eta = 4M^2 = \text{sinc}^2(k/N) \quad (27)$$

此式即一般二元光学元件衍射效率公式,与一般文献上报道的二元光学元件衍射效率公式完全一致,因此具有一般意义。

(2) **深度误差公式** 只考虑深度误差时,对位误差为零,即  $k = -1, \delta A = 0$ , 从而  $V = 0, U_1 = U_2 = \text{sinc}(3\delta d_1/2)/\text{sinc}(3\delta d_2/4), U_4 = \cos(3\pi \cdot \delta d_2/2)$ , 代入(19) 得

$$\eta = 2M^2 \cdot U_1^2(1 + U_4) = \text{sinc}^2(1/4) \cdot \frac{\text{sinc}^2(3 \cdot \delta d_1/2)}{\text{sinc}^2(3 \cdot \delta d_1/4)} \cdot \cos^2(3\pi \cdot \delta d_2/4) \quad (28)$$

当  $\delta d_1 = \delta d_2 = \delta d$  时,可以得到均匀深度误差公式,如图 3 所示。

(3) **对位误差公式** 这时  $\delta d_1 = \delta d_2 = 0$ , 从而  $U_1 = 1, U_2 = 1, U_3 = 0, U_4 = 1, U_5 = -1$ , 代入(19), 得

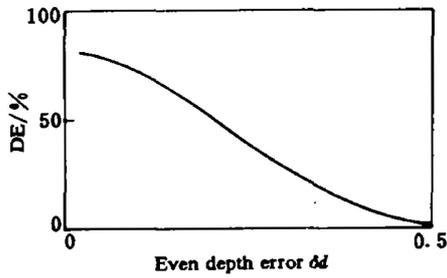


图 3 均匀深度误差曲线

Fig. 3 Theoretical curve of even depth error

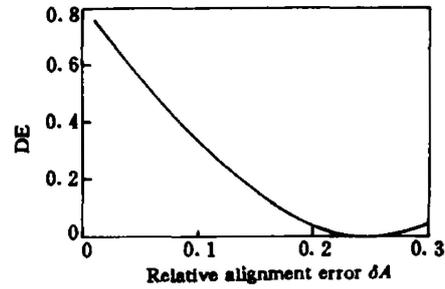


图 4 对位误差曲线

Fig. 4 Theoretical curve of alignment error

$$\eta = 4M^2 = \frac{16}{(k\pi)^2} \cdot \sin^2 \left[ \left( \frac{1}{N} - \delta A \right) \cdot k\pi \right] \quad (29)$$

将上式解析公式所表达的曲线绘制成图 4, 考虑到对位误差  $\delta A$  不可能太大, 在  $\delta A \leq 0.2$  时, 上述  $\sin$  曲线在  $0.19\pi$  范围内基本上为一条直线。因此 4 阶二元光学元件衍射效率随对位误差的增加而线性减少。

### 3 解析结果与计算机模拟及实验结果的比较

上面根据标量衍射理论导出了 4 阶二元光学元件有制作误差时衍射效率的解析公式。现在利用我们已完成的“深蚀刻二元光学元件制作误差模拟软件”<sup>[1,2]</sup>对相应情形进行计算, 便于对比分析。为进一步检验解析结果的正确性, 实验制作了三块 4 阶闪耀光栅(空间频率为 50 线/mm), 现将实验结果、模拟软件所计算的衍射效率和用解析公式(19)计算出的结果同时列于表 1 中分析比较。表中数据说明, 解析公式与模拟计算的结果符合得很好, 与实验结果较接近。

表 1 计算机模拟与解析法计算衍射效率对比

Table 1 Comparison of diffractive efficiency between analytic and simulation results

No.	$\delta d_1$	$\delta d_2$	$\delta A$	analytical formula $\eta / \%$	simulation method $\eta / \%$	experimental results $\eta / \%$
1	0	0	0	81	81	
2	-0.05	0.05	0.01	73.3	75.01	
3	0.1	-0.1	0.01	68.9	68.45	64.5
4	-0.05	0.1	0.01	69.7	69.46	
5	0	-0.2	0.02	60.2	60.7	
6	0.1	-0.2	0.02	56.9	57.45	52.3
7	0.2	0.15	0.015	49.4	51.04	44.8
8	-0.3	0	0.03	38	38.69	

### 4 结束语

本文用标量衍射理论导出了有制作误差情形时 4 阶二元光学元件衍射效率的解析公式;

同时利用已完成的“深蚀刻二元光学元件制作误差模拟软件”计算了相应的情形;最后,用实验对所计算的结果进行了初步的检验。解析公式与模拟计算的结果表现出很好的一致性,两者与实验结果均接近。

由于套刻误差尤其是对位误差的复杂性,衍射效率与制作误差关系的解析式推导是很困难的。因此,本文导出的制作误差解析公式,提供了对二元光学元件进行衍射效率与制作误差关系定量研究的方便工具,这些工作对于深蚀刻二元光学元件的制作具有重要指导意义。

### 参 考 文 献

- 1 Xu Ping, Zhang Xiaochun, Guo Lürong *et al.*. Fabrication errors analysis and simulation of binary optical element. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1996, **16**(6): 833~838 (in Chinese)
- 2 Xu Ping, Tang Jiyue, Pang Ling *et al.*. Fabrication errors simulation of deep etched binary optics elements. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1997, **A24**(6): 536~542 (in Chinese)
- 3 Xu Ping, Zhang Xiaochun, Guo Lürong *et al.*. Theoretical analysis on  $N$ -step blazed grating. *College Physics* (大学物理), 1996, **15**(4): 7~8 (in Chinese)

## Fabrication Error Analysis of 4-step Binary Optic Elements

Xu Ping Li Jingzhen Bu Guixue

(Department of Applied Physics, Shenzhen University, Shenzhen 518060)

Pan Ling Fuo Lürong Guo Yongkang

(Information Optics Institute, Sichuan University, Chengdu 610064)

**Abstract** In this paper, an analytic formula is given to show the relationship between the diffractive efficiency and fabrication error of 4-step binary optic elements by using the scalar diffractive theory. The formula has been discussed in some situations and compared with the results of simulation accomplished by us before. The results of the two methods agree well. The finding may play a role in guiding the fabrication of binary optic elements.

**Key words** binary optics, fabrication error, diffractive efficiency, theoretical analysis