

高斯光束经圆波片后的衍射 *

盛正卯 杨焕雄

(杭州大学物理系 杭州 310028)

提要 模拟腔外式新光束激光器并基于线性衍射理论得到经各种圆波片衍射后,其光轴上的光强分布。发现加带位相差的圆波片衍射后,轴上光强可在很宽的范围内得到加强,但其无穷远处的发散角将增大。

关键词 新光束激光器,圆波片,衍射

1 引 言

随着激光技术的广泛应用和不断发展,人们对高斯光束衍射问题的研究兴趣越来越浓^[1,2]。特别是美国 Durnin 等^[3]引入“无衍射光束”的概念以来,引起人们对衍射理论和实验上的深入探讨^[4,5]。国内王绍民等发表了多篇论文^[6,7],提出了新光束 ($M_s < 1$) 的概念,引起了国内外同行广泛的关注和热烈的讨论^[8,9]。

王绍民等从实验上发现激光束经圆波片衍射后,在光轴上的光强(离激光器数米远的远场)比没有圆波片时增强了数倍,并得出结论:此时的光束质量因子

$$M_s = A/B < 1 \quad (1)$$

其中 A 和 B 分别为被考察光束的束腰宽度 \times 光束的远场发散角和高斯光束的束腰宽度 \times 高斯光束的远场发散角。

显然王教授等的结论与线性衍射理论的论断:光束质量因子 M^2 总是大于等于 1 (M^2 按二阶矩定义) 明显不符。王教授等曾提出了“ π 跃变的边界衍射波”理论及其它的非线性理论来解释这个现象。而部分光学界同行依据波动光学理论对王教授等的结论提出了怀疑^[8,9],实验上是否存在测量错误?

那么线性衍射理论即 Kirchhoff 衍射理论对圆波片这样的体系是否还适用? 若适用会得出什么样的结论? 我们认为回答这个问题的最好方法是用 Kirchhoff 衍射公式直接计算这个体系的衍射强度,而据我们所知还没有人严格地分析过高斯光束经圆波片的衍射问题。为了不使复杂的数学形式掩盖住这一问题的物理本质,我们将着重讨论高斯光束经如图 1 所示的圆波片衍射后在其光轴上的光强分布。

* 国家教委留学回国人员基金和浙江省自然科学基金资助项目。

收稿日期: 1997—02—12; 收到修改稿日期: 1997—04—23

2 Kirchhoff 衍射分析

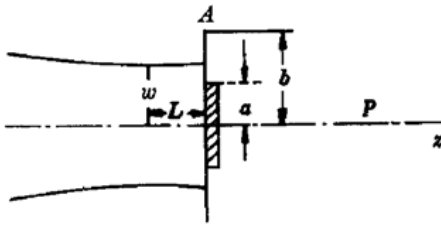


图 1 圆波片对高斯光束的衍射。光阑半径为 b ，圆波片半径为 a ，光束的束腰宽度为 w_0

Fig. 1 Diffraction of a Gaussian beam by a circular phase-plate. Where w_0 is the width of beam waist, a and b are the radii of the phase-plate and the aperture respectively, L is the distance between the beam waist and the phase-plate

到束腰的距离为 L ，则光阑处的电场分布为

$$E(\rho, L) = \frac{c_0}{w(L)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(L)}\right] \exp\left\{ik\left[L + \frac{\rho^2}{2R(L)}\right] + i\phi(L)\right\} = U_0 \exp\left\{-\rho^2\left[\frac{1}{w^2(L)} - \frac{ik}{2R(L)}\right]\right\} \quad (4)$$

其中

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z}\right)^2\right] \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2} \quad (5)$$

$$\phi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)$$

设波片产生的附加位相差为 $e^{i\psi}$ ，则衍射面上电场分布为

$$E(\sigma) = \begin{cases} e^{i\psi} E(\rho, L) & 0 \leq \rho \leq a \\ E(\rho, L) & a \leq \rho \leq b \\ 0 & \rho > b \end{cases} \quad (6)$$

利用(3)式可得

$$E(P) = -ik(e^{i\psi} - 1) \int_0^a E(\rho, L) \frac{z}{r^2} e^{ikr} \rho d\rho - ik \int_0^b E(\rho, L) \frac{z}{r^2} e^{ikr} \rho d\rho \quad (7)$$

其中 $-ik \int_0^{a,b} E(\rho, L) \frac{z}{r^2} e^{ikr} \rho d\rho$ 就是高斯光束经圆孔衍射后在远场的场分布。它可利用合流超几何函数展开，然后计算机数值计算。然而仅讨论光轴上的光强分布时，计算可大为简化。此时

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \simeq z + \frac{\rho^2}{2z} + \dots$$

经复杂的计算得到解析结果如下

$$E(P) = \frac{-ikU_0}{2z(\eta_r - i\eta_i)} e^{ikz} \left\{ (e^{i\psi} - 1) [1 - \exp(-\eta_r a^2 + i\eta_i a^2)] + [1 - \exp(-\eta_r b^2 + i\eta_i b^2)] \right\} \quad (8)$$

并得到远场轴上各点的光强分布

如图 1 所示，光波从左边入射到光阑 A 上，设其上某点 $Q(x', y')$ 处电场为 $E(\sigma)$ ，则右边任一点 P 处的电场 $E(P)$ 由 Kirchhoff 公式得^[2]

$$E(P) = \frac{1}{2\pi} \iint E(\sigma) \left(\frac{1 - ikr}{r^2} \right) \cos\theta e^{ikr} d\sigma \quad (2)$$

式中 r 表示 Q 点到 P 点的距离， θ 表示 QP 方向与光阑法线方向的夹角， $\cos\theta = z/r$ ， $k = 2\pi/\lambda$ 表示波数， $d\sigma$ 表示对光阑透光部分的面积分。

由于我们讨论的是远场， $kr \gg 1$ ，所以可表示为

$$E(P) = \frac{-ik}{2\pi} \iint E(\sigma) \frac{\cos\theta}{r} e^{ikr} d\sigma \quad (3)$$

设入射高斯光束是对称正入射的，由于具有轴对称性，取柱坐标较为方便。同时设束腰半径为 w_0 ，光阑

$$I(0, z) = \frac{c_0^2 k^2 \eta_r}{4z^2(\eta_r^2 + \eta_i^2)} (1 + \exp(-2\eta_r b^2) - 2\exp(-\eta_r b^2) \cos(\eta_i b^2 - \delta) + 2\exp(-2\eta_r a^2)(1 - \cos\delta) - 2\exp(-\eta_r a^2)[\cos(\eta_i a^2) - \cos(\eta_i a^2 - \delta)] - 2\exp[-\eta_r(a^2 + b^2)]\{\cos[\eta_i(b^2 - a^2)] - \cos[\eta_i(b^2 - a^2) - \delta]\}) \quad (9)$$

其中

$$\eta_r = \frac{1}{w^2(L)} \quad \eta_i = \frac{k}{2z} + \frac{k}{2R(L)}$$

3 举例计算

3.1 当 $a = b = \infty$ 时, 回到了高斯光束自由传播时光轴上的光强分布

$$I_0(0, z) = \frac{c_0^2 k^2 \eta_r}{4z^2(\eta_r^2 + \eta_i^2)} = \frac{c_0^2}{w^2(L + z)} \quad (10)$$

3.2 $a = 0$, 或 $a = b$, 或 $\delta = 2n\pi$ (均相当于没有加圆波片), (9) 式退化为

$$I(0, z)|_{a=0} = I_0(0, z)[1 + e^{-2\eta_r b^2} - 2e^{-\eta_r b^2} \cos(\eta_i b^2)] \quad (11)$$

这正是高斯光束经半径为 b 的圆孔衍射后光轴上的光强分布^[2], 表明(9)是合理的。

3.3 $L = 0$, 即光阑放在光束的束腰处, 则 $R(L) = \infty$,

$$\eta_r = \frac{1}{w_0^2}, \quad \eta_i = \frac{k}{2z}$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\eta_i \rightarrow 0$,

$$I(0, z)/I_0(0, z) \rightarrow 1 + e^{-\eta_r b^2}(e^{-\eta_r b^2} - 2) + 4\sin^2 \frac{\delta}{2}(e^{-\eta_r a^2} - e^{-\eta_r b^2})(e^{-\eta_r a^2} - 1) \quad (12)$$

因为

$$\eta_r > 0, \quad 0 < a^2 \leq b^2$$

所以

$$I(0, z)/I_0(0, z) < 1$$

即当波片放在束腰处时, 则当 z 非常大以后, 光轴上的光强不管加怎样的位相片总小于(最多等于)高斯光束自由传播时的光强。但在有限范围内可以达到 $I(0, z) > I_0(0, z)$ 。

例如取 $\delta = \pi$, 即加 $\lambda/2$ 波片, 并设 $b \gg w_0$, 则

$$I(0, z)/I_0(0, z) = 1 + 4\exp\left(-\frac{a^2}{w_0^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{a^2}{w_0^2}\right) - \cos \frac{ka^2}{2z} \right] \quad (13)$$

令

$$D = \arccos \left[\exp\left(-\frac{a^2}{w_0^2}\right) \right] \quad z_{\max} = \frac{ka^2}{2D} \quad z_0 = \frac{ka^2}{2\pi - D} \quad (14)$$

$$\begin{cases} I(0, z) > I_0(0, z) & z_0 < z < z_{\max} \\ I(0, z) < I_0(0, z) & z > z_{\max} \end{cases}$$

若 $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$, $w_0 = 5.0 \text{ mm}$, $a = 2.5 \text{ mm}$, 则 $0.33 \text{ m} < z < 2.73 \text{ m}$ 区间内轴上光强均比自由高斯光束强(见图 2(a) 曲线)。由于能量守恒, 在轴上光强加强的地方其光斑尺寸必定减小, 此处的发散角就一定比自由传播时小, 以此计算得到的光束质量因子 M 将小于高斯光束的光束质量因子, 即小于 1。从上面的讨论以及如前所述的波片可使得光束在很宽的空间范围内得到压缩, 但在 $z > z_{\max}$ 以后光束反而展宽了。因此在实验过程中要测出真正的远场发散角, 距离的选取非常重要, 在常规的远场区(如这里的 2.5 m 处)光强增强了, 并不说明其真正的远场发散角比自由高斯光束小。

取 $\delta = \pi/2$ 即加 $\lambda/4$ 波片, 也设 $b \gg w_0$, 则

$$I(0, z)/I_0(0, z) = 1 + 2\exp\left(-\frac{a^2}{w_0^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{a^2}{w_0^2}\right) - \cos \frac{ka^2}{2z} - \sin \frac{ka^2}{2z} \right] \quad (15)$$

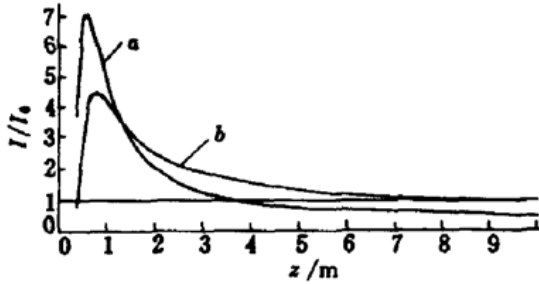


图2 轴上光强 I 与自由高斯光强 I_0 之比随 z 的变化。其中 $w_0 = 5.0 \text{ mm}$, $a = 2.5 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$, (a): $\delta = \pi$, (b): $\delta = \pi/2$

Fig. 2 The intensity ratio between the diffraction beam and the free Gaussian beam as a function of the distance z from the phase-plate. The beam waist width of the input Gaussian beam is $w_0 = 5.0 \text{ mm}$, the radii of the phase-plate and the aperture are $a = 2.5 \text{ mm}$, and $b = 20 \text{ mm}$ respectively, and the phase difference (a): $\delta = \pi$, and (b): $\delta = \pi/2$

发现

(1) 加圆波片确实能在一定区间内将光束压缩,使其轴上光强加强,在某些地方甚至可加强数倍。但在无穷远处轴上光强反而减弱了,即真正的远场发散角仍大于自由传播的高斯光束。表明在讨论激光束远场发散角时,测量距离的选取非常关键;

(2) 加圆波片的衍射效应有点类似于圆孔衍射,都能使轴上某些区间光强加强,但两者有本质的差别,后者以损失能量为代价,前者只改变光强分布。若用与 Kirchhoff 衍射理论等价的边界衍射波理论来讨论,则前者由波片直透光,波片边界散射波和波片外直透光三部分构成,而后者只有两部分;

(3) 圆波片的尺寸对衍射效应有直接的影响。波片小衍射效应明显,即光强加强厉害,但加强的区间较小。应根据使用的要求确定尺寸大小;

(4) 波片的厚度或位相差对衍射的影响同样重要。加 $\lambda/2$ 波片轴上光强增加较大,但加强区间小一些,而加 $\lambda/4$ 波片时,加强区间大大扩大,虽然光强增加程度小一些;

(5) 波片离开束腰一定距离,将使光强加强区间扩大。

上面的结论是模拟腔外式新光束激光器并基于线性衍射理论得到的,为了给出一个直观的结果,仅仅讨论了轴上光强的分布。虽然如此,我们可以看出加圆波片对于改变光束的传输特性是有效的。从实用的角度看,这种改变是有用的,即使从原理上讲没有什么突破。要得出正确的光束质量因子 M^2 , 得计算光强的横向分布随距离的变化,计算较繁。对于腔内式新光束激光器(圆波片放在谐振腔内),情况复杂得多,因为它相当于多次衍射后成模输出,原则上具有非线性效应。不过对于一般中低功率激光器而言,腔内折射率引起的非线性效应是非常小的,

也取参数 $a = 2.5 \text{ mm}$, $w_0 = 5.0 \text{ mm}$, 则在 $0.5 \text{ m} < z < 9.0 \text{ m}$ 区间内(见图 2 (b) 曲线),轴上光强均为加强。说明位相片的作用是非常明显的,而且不同的位相片效应相当不同。当用同尺寸的 $\lambda/4$ 波片代替 $\lambda/2$ 波片时,光强加强区从 $0.33 \text{ m} < z < 2.73 \text{ m}$ 扩大到 $0.5 \text{ m} < z < 9.0 \text{ m}$,但光强加强的幅度减弱了。

3.4 $L \neq 0$, 仍取 $\delta = \pi, b \gg w(L)$, 则

$$I(0, z)/I_0(0, z) = 1 + 4e^{-\eta_1 a^2} [e^{-\eta_1 a^2} - \cos(\eta_1 a^2)] \quad (16)$$

$$\frac{1}{z_{\max}} = \left[\frac{2D}{ka^2} - \frac{1}{R(L)} \right] \quad (17)$$

说明 $L \neq 0$, 使得 z_{\max} 增大,但 z_{\max} 仍有限,即加波片后在无穷远处轴上光强仍小于自由传播的高斯光束在该处的光强。

4 结论和讨论

前面我们利用 Kirchhoff 衍射公式详细地分析了高斯光束经具有不同半径、不同位相差、放置不同位置的圆波片的衍射后,其光轴上光强在远场处的分布情况。

如高斯光束就是利用线性理论从平面波经圆孔多次衍射成模而得到的。因此如果前面的线性衍射理论对腔外式新光束激光器分析是正确的话,对于加同样尺寸波片的腔内式新光束激光器而言,没有特别的理由否认“线性衍射理论”的适用性,除非波片的材料或尺寸有了很大的变化,使得必须考虑非线性边界条件;或中央光强有了数量级上的增大以致不得不考虑折射率引起的非线性效应。

最后我们必须指出不管由于非线性边界条件或腔内介质的非线性效应是否能引起模式的改变(可能导致 $M^2 < 1$),出了腔以后,特别是远场,边界的影响已很小,且空气是线性介质,所以反映物理本质的 M^2 必定大于或等于 1。

致谢 作者曾与王绍民教授、李有泉教授、陆璇辉教授及赵道木同志等进行过有益并富有启发性的讨论,在此一并致谢。

参 考 文 献

- 1 J. P. Campbell, L. G. DeShazer. Near fields of truncated-Gaussian apertures. *J. Opt. Soc. Am.*, 1969, **59**(11) : 1427~1429
- 2 R. G. Schell, G. Tyras. Irradiance from an aperture with a truncated-Gaussian field distribution. *J. Opt. Soc. Am.*, 1971, **61**(1) : 31~35
- 3 J. Durnin, J. J. Miceli, I. H. Eberly. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**(15) : 1499
- 4 G. Indebetouw. Nondiffracting optical fields; some remarks on their analysis and synthesis. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1989, **6**(1) : 150~152
- 5 P. Sprangle, B. Hafizi. Comment on nondiffracting beams. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **66**(6) : 837
- 6 Wang Shaomin. On the nature of diffraction. *Appl. Laser (应用激光)*, 1994, **14**(3) : 99 (in Chinese)
- 7 Wang Shaomin, Pan Chengzhi, Cai Ruirong *et al.*. A CO₂ laser new beam. *Appl. Laser (应用激光)*, 1994, **14**(4) : 160 (in Chinese)
- 8 Jiang Zhiping, Lu Qisheng, Liu Zejin. Several questions related to diffraction. *Appl. Lasers (应用激光)*, 1994, **14**(6) : 266 (in Chinese)
- 9 Lü Baida. Analyzing the characteristics of Bessel beam and the concep relating to diffraction-free beam. *Chinese J. Quantum Electr. (量子电子学)*, 1996, **13**(2) : 97 (in Chinese)

Diffraction of a Gaussian Beam Passing through a Circular Phase-plate

Sheng Zhengmao Yang Huanxiong

(Department of Physics, Hangzhou University, Hangzhou 310028)

Abstract The analytical expression for the diffraction distribution on the axis of a Gaussian beam through a circular phase-plate is obtained. It is found that the intensity of the diffracted light is larger than that of the free Gaussian beam in a wide range, but the intensity in the infinite far field is less than that of the free Gaussian beam.

Key words new beam laser, circular wave-plate, diffraction