

利用激光器产生单模亚泊松光*

杨明 曹力 吴大进

李再光

(华中理工大学物理系和激光国家重点实验室)

(华中理工大学激光国家重点实验室 武汉 430074)

提要 对利用激光器产生单模亚泊松光进行了研究。提出了一个普遍的主方程,它适用于任意稳定的原子注入方式,并在该方程中,考虑了有限腔寿命的作用。得出了输出光子数的 Mandel 因子,并指出在泵噪声抑制的基础上通过减少腔寿命,可以代替抑制自发辐射,使输出光子数的涨落进一步减小。

关键词 泵噪声,腔寿命,亚泊松光,主方程,Mandel 因子

1 引言

近年来,人们对激光系统中产生非经典光(亚泊松光)进行了许多研究。最常用的方法为通过减弱泵噪声来达到产生亚泊松光子分布的目的^[1~4],但这些研究都只局限于一系列很特殊或很理想化的模型:例如完全不存在涨落的规则泵,或原子注入率为 δ 相关的高斯分布。输出光子数涨落的进一步抑制通常采用在抑制泵噪声的基础上抑制自发辐射。文献[1]中,F. Haake 从理论上指出,当注入的下能级和上能级原子的寿命比趋于无穷大时,可以达到抑制自发辐射的目的,但在实际中这一工艺很难实现。

另一个产生亚泊松光的有效方法是顾樵、张纪岳提出的^[5~7]。他们考虑了有限的腔寿命,指出了单模激光光子统计的新特点:在腔寿命 τ 具有一个有限大小时(工艺上可以通过减小腔寿命或采用长寿命原子来达到^[7]),光子数分布呈现超泊松与亚泊松的交替变化,可以达到产生亚泊松光子分布的目的,但这一方法产生的亚泊松分布涨落较大(接近于泊松分布)。

文献[5~7]的方法是建立在泵统计为泊松统计的基础之上的,本文中我们不但减小腔寿命而且进一步考虑抑制泵噪声;为此提出了适用于任意稳定注入原子泵统计的主方程,并由该方程得出输出光子数的 Mandel 因子,分析了产生亚泊松光子分布的泵条件。分析表明,在抑制泵噪声的基础上,减小腔寿命,可以代替抑制自发辐射,进一步减小输出光子数涨落。

2 主方程的提出

考虑腔寿命 τ 有限的情况(即腔寿命 τ 与原子寿命 ν^{-1} 的比值不是 ∞),在粗粒化时间 Δt 内,由一个上能级原子通过腔引起的密度矩阵的变化为^[5,6]

* 国家自然科学基金资助课题。

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = \hat{u}P_n(t) \quad (1)$$

其中算符 \hat{u} 定义为

$$\hat{u}P_n(t) = \beta_{n-1}P_{n-1}(t) - \beta_n P_n(t) \quad (2a)$$

这里

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 - e^{-T})} \frac{e^{-T} \left\{ x \sqrt{\frac{2}{R}(n+1)} \sin \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R}(n+1)} \right] - \cos \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R}(n+1)} \right] \right\} + 1}{1 + \frac{2}{R}x^2(n+1)} \quad (2b)$$

而

$$R = \frac{r_a}{C} \quad (2c)$$

$$x = \sqrt{\frac{A}{C}} \quad (2d)$$

$$A = 2r_a(g/\gamma)^2 \quad (2e)$$

A 为线性增益系数, x 为相对泵浦参数, r_a 为激光上能级原子的注入速率, γ 为原子的衰变常数, C 为腔的损耗系数, $T = \nu\tau$ 为腔寿命 τ 与原子寿命 ν^{-1} 的比值。这里没有考虑热场、吸收以及失谐的影响, 这些因素的减弱与消除, 有利于产生更深的亚泊松分布^[6]。

如果在 Δt 时间内, 有 N 个上能级原子注入, 则

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = \hat{u}^N P_n(t) \quad (3)$$

在 Lamb-Scully 激光理论中, N 被认为具有泊松分布。但近来的研究表明通过某些实验手段可以适当地控制 N 的分布, 并由此减弱输出光子数的涨落。这里将对 N 的分布用一个普遍的形式描述, 即令其分布函数为 $f(N, \Delta t)$, 我们假定原子的注入是稳定的, 其分布函数不含 t , 在 (3) 式中考虑这个分布函数则有

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = \sum_N f(N, \Delta t) \hat{u}^N P_n(t) = \varphi(\hat{u}, \Delta t) P_n(t) \quad (4)$$

其中

$$\varphi(\hat{u}, \Delta t) = \sum_N f(N, \Delta t) \hat{u}^N \quad (5)$$

为 $f(N, \Delta t)$ 的母函数。由 (4) 式, 并考虑腔损耗, 则有

$$\dot{P}_n(t) = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \varphi(\hat{u}, \Delta t) \Big|_{\Delta t=0} P_n(t) + C[-nP_n(t) + (n+1)P_{n+1}(t)] \quad (6)$$

后一项为腔损耗项^[8]。将 (6) 式中的 $\varphi(\hat{u}, \Delta t)$ 展开则有

$$\dot{P}_n(t) = \sum_k \frac{D_k}{k!} \hat{u}^k P_n(t) + C[-nP_n(t) + (n+1)P_{n+1}(t)] \quad (7a)$$

其中

$$D_k = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \frac{\partial}{\partial \hat{u}^k} \varphi(\hat{u}, \Delta t) \Big|_{\Delta t=0} = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N(N-1)\cdots(N-k+1) \rangle \Big|_{\Delta t=0} \quad (7b)$$

为 N 的 k 阶阶乘矩的粗粒时间变化率, 并且 $D_1 = r_a$ 为激光上能级原子的注入率。

(7a) 式即为对应于普遍的泵统计, 且腔寿命 τ 有限时的主方程, 当 N 取为泊松分布, 而且 $\tau \rightarrow \infty$ 时它过渡到 Lamb-Scully 激光理论的主方程^[8]。

3 输出光子数涨落的分析

由 (7a) 式, 在稳态下 ($\dot{P}_n(t) = 0$), 对于任一 $n = n'$ 有

$$\sum_k \frac{D_k \hat{u}^k P_{n'} + C[-n' P_{n'} + (n' + 1) P_{n'+1}] = 0$$

由 (2a), 上式可写成

$$\sum_k \frac{D_k \hat{u}^{k-1} (\beta_{n'-1} P_{n'-1} - \beta_{n'} P_{n'}) + C[-n' P_{n'} + (n' + 1) P_{n'+1}] = 0$$

上式两边求和 $\sum_{n'=0}^{\infty}$, 并令 $P_{n'} = 0 (n' < 0)$, 则有

$$-\sum_k \frac{D_k \hat{u}^{k-1} \beta_n P_n + C(n+1) P_{n+1} = 0 \quad (8)$$

(8) 式为稳态情况下 P_n 所满足的递推关系式, 当 $f(N, \Delta t)$ 为泊松分布, 且 $\tau \rightarrow \infty$ 时它过渡到 Lamb-Scully 激光理论的细致平衡条件^[8], 但在一般情况下, 细致平衡不被满足。

本文将只分析光子数的涨落, 所以 (8) 式可以截断到 $k = 2$ 的项, 在文献 [3] 中, J. Bergou 等人曾证明这一截断在求二阶及二阶以下矩阵是足够精确的。考虑到 \hat{u} 的定义 (2a), (8) 式化为

$$D_1 \beta_n P_n + \frac{1}{2} D_2 \beta_n^2 P_n - \frac{1}{2} D_2 \beta_n \beta_{n-1} P_{n-1} - C(n+1) P_{n+1} = 0 \quad (9)$$

(9) 式两边求和 $\sum_{n=0}^{\infty}$, 有

$$\bar{n} = \frac{D_1}{C} \sum_n \beta_n P_n = \frac{D_1}{C} \bar{\beta}_n \quad (10a)$$

式两边乘以 $(n+1)$, 并求和 $\sum_{n=0}^{\infty}$, 有

$$\bar{n}^2 = \frac{D_1}{C} \left(\overline{n \beta_n} + \bar{\beta}_n + \frac{D_2}{2D_1} \bar{\beta}_n^2 \right) \quad (10b)$$

假定 $n \gg 1$, 并且预期在 \bar{n} 标度下, n 具有一个尖锐的峰值, 则 $\beta_{n-1} \beta_n \approx \beta_{n-1}^2$ 。同样, 由于上面的假定, 可展开 β_n

$$\beta_n = \beta_n + \frac{\partial}{\partial \alpha} \beta_n \Big|_{\alpha=1} (\alpha - 1) \quad (11)$$

其中 $\alpha = n/\bar{n}$ 。将 (11) 式代入 (10a) 式, 则有

$$\bar{n} = \frac{D_1}{C} \beta_n = R \beta_n \quad (12a)$$

光子分布的不同形式, 通常用 Mandel 因子 Q 来区分, 其定义为

$$Q = \frac{\overline{n^2} - \bar{n}^2 - \bar{n}}{\bar{n}}$$

当 $Q = 0$ 时光子数分布为泊松分布, $Q < 0$ 时为亚泊松分布, 而 $Q > 0$ 时为超泊松分布。将 (10b), (12a) 两式代入上式, 并考虑 (11) 式, 得

$$Q = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_2}{D_1} \beta_n \right) \Big/ \left(1 - \frac{D_1}{C} \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \beta_n \Big|_{\alpha=1} \right) - 1 \quad (12b)$$

(2b) 式稍作改写即成为

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-e^{-T})} \frac{e^{-T} \sqrt{1 + \frac{2}{R} x^2 (n+1)} \sin \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R} (n+1)} - \arctg \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R} (n+1)}} \right] + 1}{1 + \frac{2}{R} x^2 (n+1)} \quad (13)$$

上式对 α 求导,并经过一些计算可得

$$\frac{D_1}{C} \frac{1}{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \beta_n \Big|_{\alpha=1} = - \frac{T e^{-T}}{\frac{4}{R} \bar{n} (1 - e^{-T})} \cos \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} + \frac{1}{Tx \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} \right] \quad (14)$$

这里仍假定 $\bar{n} \gg 1$,并考虑在远高于阈值运转时应有 $x^2 \gg 1$,故在计算中略去了 $1/x$ 的二次以上幂.这样,由(12b)及(14)并考虑(12a),得 Q 因子的表达式为

$$Q = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{R} \bar{n} \right) \left\{ 1 + \frac{T e^{-T}}{\frac{4}{R} \bar{n} (1 - e^{-T})} \cos \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} + \frac{1}{Tx \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} \right] \right\}^{-1} \quad (15)$$

下节,我们将利用 Mandel 因子的表达式(15)进行分析和讨论。

4 讨论和结论

4.1 $T \rightarrow \infty$

对于一般的激光器,其腔寿命 τ 远大于原子寿命,因此可以认为是 $T \rightarrow \infty$ 的情况,这时由(13)式及(12a)式有

$$\beta_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{2}{R} \bar{n} x^2} \quad (16a)$$

$$\bar{n} = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \quad (16b)$$

将(16b)代入(15)式,并略去 $1/x$ 的二次以上幂,有

$$Q = \frac{1}{4} \frac{D_2}{D_1} \quad (17)$$

1) 由定义(7b)式可知 $D_1 > 0$,所以当 $D_2 = 0$,即

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N(N-1) \rangle \Big|_{\Delta t=0} = 0$$

时,由(17)式有 $Q = 0$,说明光子数分布为泊松分布.满足上式的一个常见的情况是 N 服从泊松分布(泊松泵),这种情况相当于 Lamb-Scully 理论。

2) 当 $D_2 < 0$,即

$$\frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N(N-1) \rangle \Big|_{\Delta t=0} < 0$$

时,光子数分布为亚泊松分布。

3) 由(7b)有

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N(N-1) \rangle = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N \rangle = \frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N^2 \rangle - D_1 \quad (18)$$

考虑到应有 $\frac{\partial}{\partial \Delta t} \langle N^2 \rangle \Big|_{\Delta=0} \geq 0$, 所以由(18)式可知, D_2 的最小值为 $-D_1$, 当 $D_2 = -D_1$ 时 Mandel 因子达到最小值 $Q = -1/4$. 也就是说, 对于 $T \rightarrow \infty$ 的激光器, $-1/4$ 是采用抑制泵噪声所能达到的最小的 Mandel 因子. 在规则泵(这时泵完全没有涨落, $N = R\Delta t$, R 为常数)情况下, $D_2 = -D_1$ 被满足.

对于光子数涨落的进一步抑制, 则需要在抑制泵噪声的基础上附加其它手段, 一般多采用抑制自发辐射, 但这在工艺上很难实现. 我们采用有限寿命的腔, 同样可以进一步抑制光子数的涨落.

4.2 T 有限的情况

(15)式即为 T 有限时的 Q 因子表达式, 为了使结论更加明显, 我们分析两种特殊情况: 一种是泊松泵, 一种是规则泵.

1) 对于泊松泵情况 $D_2 = 0$, 由(15)式有

$$Q = \left\{ 1 + \frac{T e^{-T}}{\frac{4}{R} \bar{n} (1 - e^{-T})} \cos \left[T x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} + \frac{1}{T x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} \right] \right\}^{-1} - 1 \quad (19)$$

由(19)式可以看出, 当改变相对泵浦参数 x 时, Q 交替出现负值、零和正值, 产生亚泊松、泊松和超泊松分布交替的现象. 这种情况在文献[5, 6]中已用数值方法讨论过. 而本文进一步导出了 Q 因子的解析表达式(19), 由(19), (12a) 及(13)式可定量地确定使输出光子数分布处于亚泊松区间的泵浦条件. 具体说明如下:

首先, 根据(19)式, 当

$$T x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} + \frac{1}{T x \sqrt{\frac{2}{R} \bar{n}}} = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

时为泊松分布. 定义 x_k 为对应于每一个 k 值的相对泵浦参数, 相应的平均光子数为 \bar{n}_k , 则由(19)式可知, x_k 为亚泊松分布和超泊松分布的分界点. 由(20)及(12a)式并考虑(13)式则有

$$x_k = E\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \left[1 - \frac{1}{(1 - e^{-T})} \frac{e^{-T} E\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 1}{E\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} \right]^{-1/2} \quad (21a)$$

$$\bar{n}_k = \frac{r_a}{c} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1 - e^{-T})} \frac{e^{-T} E\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 1}{E\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} \right] \quad (21b)$$

其中函数 $E(t)$ 定义为

$$E(t) = \frac{Tt + \sqrt{T^2 t^2 + 4T(T-1)}}{2T^2} \quad (21c)$$

而当

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < Tx \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}}} + \frac{1}{Tx \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}}} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

即

$$x_{2k-1} < x < x_{2k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

时,光子数分布为亚泊松分布。同样,当

$$x_{2k} < x < x_{2k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

时,光子数分布为超泊松分布。

特别是当 $x \gg 1$ 时,由(13)及(12a),(19)式化为

$$Q \approx \left[1 + \frac{Te^{-T}}{2(1 - e^{-T})} \cos(Tx) \right]^{-1} - 1 \quad (25)$$

这时,亚泊松和超泊松分布以 $2\pi/T$ 为周期变化。 Q 因子的极小值出现在 $Tx = 2k\pi (k = 1, 2, 3, \dots)$ 处

$$Q_{\min} \approx \left[1 + \frac{Te^{-T}}{2(1 - e^{-T})} \cos(Tx) \right]^{-1} - 1 \quad (26)$$

图 1 中的曲线(a) 示出了 Q_{\min} 随 T 的变化情况,可以看出,随着 T 的变大, Q_{\min} 逐渐增大,并最终趋于零。

在文献[1]中, F. Haake 等人证明:在泊松泵情况下,即使抑制自发辐射也不会产生亚泊松光子分布,但这里我们看到通过采用有限寿命的腔,在泊松泵情况下仍然可以产生亚泊松光子分布,这也是后一种方法的一个优点。

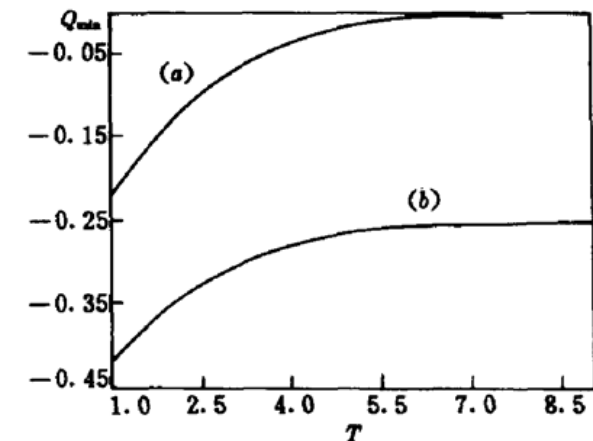


图 1 Mandel 因子 Q 的极小值 Q_{\min} 随 T 变化的曲线

(a) 泊松泵情况; (b) 规则泵情况

Fig. 1 The minimum of the Mandel factor Q as a function of T for (a) Poissonian pump and (b) regular pump

2) 对于规则泵情况,由(15)式

$$Q = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{R\bar{n}} \right) \left\{ 1 + \frac{Te^{-T}}{\frac{4}{R}\bar{n}(1 - e^{-T})} \cos \left[Tx \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}} - \frac{1}{x \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}}} + \frac{1}{Tx \sqrt{\frac{2}{R}\bar{n}}} \right] \right\}^{-1} - 1 \quad (27)$$

这里仅考虑 $x \gg 1$ 情况,由(27)及(12a),(13)式有

$$Q \approx \frac{3}{4} \left[1 + \frac{Te^{-T}}{2(1 - e^{-T})} \cos(Tx) \right]^{-1} - 1 \quad (28)$$

由上式可见,当 $\cos(Tx) > 0$ 时 $Q < -1/4$,由于采用有限寿命的腔,光子数涨落进一步减小。当 $Tx = 2k\pi (k$ 为整数) 时抑制达到最大,即

$$Q_{\min} \approx \frac{3}{4} \left[1 + \frac{Te^{-T}}{2(1 - e^{-T})} \right]^{-1} - 1 \quad (29)$$

图 1 中的曲线(b) 示出了这一 Q 因子极小值随 T 的变化情况,在 T 不是很大时,这一极小值不仅小于单纯采用有限寿命腔的情况,也小于单独采用泵噪声抑制情况($Q = -1/4$),由于两种手段的结合,使光子数涨落进一步减小。

参 考 文 献

- 1 F. Haake, S. M. Tan, D. F. Walls. Photon noise in lasers. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(12) : 7121~7132
- 2 C. Benkert, M. O. Scully, J. Bergou *et al.*. Role of pumping statistics in laser dynamics: Quantum Langevin approach. *Phys. Rev. A*, 1990, **41**(5) : 2756~2765
- 3 J. Bergou, L. Davidoyich, M. Orszag *et al.*. Role of pumping statistics in maser and laser dynamics: Density-matrix approach. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(9) : 5073~5080; Influence of the pumping statistics in lasers and masers. *Opt. Commun.*, 1989, **72**(1,2) : 82~86
- 4 L. Z. Wang, Shi-Yao Zhu, J. Bergou. Generation of sub-Poissonian photon statistics in a two-level atomic oscillator. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**(5) : 2436~2445
- 5 Gu Qiao, Zhang Jiyue. A possible way for generating sub-Poissonian field. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1989, **9**(5) : 478~480 (in Chinese)
- 6 Gu Qiao. Novel properties of monomode laser optical statistics. *Science in China (Series A)*(中国科学), 1990, **A20**(7) : 721~727 (in Chinese)
- 7 Gu Qiao. Photon antibunching in a single-mode laser light. *Chinese J. Lasers* (中国激光), 1988, **15**(8) : 487~491 (in Chinese)
- 8 M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb. *Laser Physics*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1974

Generating Single-mode Sub-Poissonian Light by Lasers

Yang Ming Cao Li Wu Dajin

(Department of Physics and National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University
of Science and Technology, Wuhan 430074)

Li Zaiguang

(National Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract The generation of single-mode sub-Poissonian light by lasers is studied. A general master equation is presented, which can be applied to any stationary atomic injection and allows for systems of finite cavity lifetime. The Mandel factor for the output photon number is derived. It is pointed out that on the basis of pump-noise-suppression, the fluctuation of the output photon number can be reduced further by shortening the cavity lifetime as well as suppressing the spontaneous emission.

Key words pump-noise, cavity lifetime, sub-Poissonian light, master equation, Mandel factor