第 25 卷 第 2 期
1998 年 2 月

中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS

Vol. A25, No. 2
February, 1998

自由电子激光的色散关系分析

江少恩
(西南核物理与化学研究所 成都 610003)

提要 对自由电子激光的色散关系进行理论分析。通过自由电子激光摆方程推导出线性增长区增益系数和折射率(复折射率的虚实部),并证明增益系数 $\mathrm{Im}(n)$ 和折射率 $\mathrm{Re}(n)-1$ 之间的关系即色散关系满足 Hilbert 变换对,亦即 Kramers-Kronig 关系,并进行了物理分析。

关键词 自由电子激光,色散分析,增益,折射率

1 引 言

介质对电磁波的折射率因电磁波频率的不同而异。当非单色的电磁波通过介质时,因其各种不同成分的折射率不同,从而其折射方向也不同,这种现象叫作色散。在电磁波通过电介质传播会发生折射的同时,还会发生吸收或增益。在吸收介质中,电磁波因吸收而有所损耗而衰减,如光在光纤中传播时,会发生折射和损耗。另一方面,在增益介质中,电磁波因增长而放大,如激光在增益介质中的产生和放大过程。

自由电子激光的物理机制[1]是:高能电子束在周期性摇摆场作用下,产生群聚,与电磁波发生互作用产生换能,电子束失去能量,电磁波获得能量,得到放大,即产生了自由电子激光(FEL)。FEL 最显著的特点是其波长连续可调,因为 FEL 的波长 $\lambda_s=\lambda_w/(2\gamma^2)$ (其中 λ_w 为摇摆场的周期,$\gamma=\sqrt{1-V^2/c^2}$ 为相对论因子,V 为电子速度)与电子能量成反比,电子能量是可以连续可调的,因此通过不同类型的电子加速器,原则上可以得到从远红外到 X 波段所有波长的 FEL。FEL 可以填补一般激光在远红外和超紫外波段的空白。FEL 中的电子束作为一种增益介质使电磁波得到放大,另一方面群聚电子束有一定的折射率,使电磁波折射,从而使激光发散或聚焦。

色散关系是研究增益和折射率之间的关系,而增益和折射率正是 FEL 的放大过程两个最重要的物理量,因此研究色散关系可以研究 FEL 的一般的变化规律,从而对 FEL 的物理本质有更深入的理解。

2 一般激光器的色散关系

单色电磁波 $E=E_0\exp[-i\omega(t-nx/c)]$ 在介质中的复折射率[2]

$$n-1=\frac{2\pi N_e^2[(\omega_0^2-\omega^2)-i\nu\omega]}{m[(\omega_0^2-\omega^2)+\nu^2\omega^2]} \tag{1}$$

收稿日期: 1996—11—25; 收到修改稿日期: 1997—03—11

其实部和虚部为

$$\alpha = \mathrm{Re}(n) - 1 = \frac{2\pi N_e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \nu^2\omega^2} \tag{2}$$

$$\beta = \mathrm{Im}(n) = -\frac{2\pi N_e^2}{m} \frac{\nu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \nu^2\omega^2} \tag{3}$$

以上几式中,N 为单位体积束缚电子束,ω_0 为原子的固有频率,ν 为阻尼或增益因子。于是可知,当 ν 为正时,电磁波受到阻尼而被损耗,当 ν 为负时,电磁波呈指数增长,增长率大小为 $\omega|\beta|/c$。电磁波在介质中的波矢量为 $k = n\omega/c$,由以上分析看到,复折射率 n 的实部代表介质的折射率,而虚部则反映介质对电磁波的吸收或放大。

由(1)式知,复折射率在复平面上半平面处是解析的函数,而当 $\omega \to \infty$ 时,$n - 1 \to 0$,则有

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \mathrm{d}\omega' = \pi i[n(\omega) - 1] \tag{4}$$

式中 P 为柯西积分主值。由(4)式等号左右边虚实部相等而得到

$$\alpha = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta(\omega')}{\omega - \omega'} \mathrm{d}\omega' \tag{5a}$$

$$\beta = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega')}{\omega - \omega'} \mathrm{d}\omega' \tag{5b}$$

其中 α 和 β 的表达式见式(2)和式(3)。

(5)式称为色散关系,亦称为克拉末-克朗尼格(Kramers-Kronig)关系,即所谓的希尔伯(Hilbert)变换对[3]。由(5)式知,复折射率虚实部不是相互独立的,而是关系密切,互相关联,只要知道了其中一个量,即可求得另一个量。

3 自由电子激光的摆方程及其求解

FEL 的电子运动由摇摆场和电磁场联合作用下产生的有质动力势确定,有质动力势的相位由摆方程决定,于是摆方程就决定了 FEL 场的相移,从而摆方程的解能确定群聚电子束对 FEL 辐射场的复折射率即增益系数和折射率。FEL 的摆方程为[4]

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2} = -\Omega_L^2 \sin\Psi \tag{6}$$

其中 $\Psi = (k_s + k_w)z - \omega t + \Phi$ 为电子在有质动力势中的相位,k_s, k_w 分别为激光场和摇摆场的波数,Φ 为光场的相移,ω 为光场的频率,即有 $\omega = ck_s$。$\Omega_L^2 = 4k_w^2 a_s a_w$,这里 a_s, a_w 分别为归一化的光场和摇摆场的矢势,以参量 $mc^2/e = 0.17$ T · cm 作归一化。由于 Ω_L 与 a_s 有关,而光场矢势 a_s 随 z 增长而变化,由此摆方程是一个非线性方程。在线性增益区,摆方程可以借助于扰动方程求解。我们将 Ψ 展开为 $\Psi = \Psi_0 + \Delta kz + \delta\Psi$,其中 Ψ_0 为电子在有质动力势中的初始相位,而 Δk 为

$$\Delta k = k_w - \omega(1 - \beta_{/\!/})/\nu_{/\!/} \approx k_w - k_s/(2\gamma^2) \tag{7}$$

Δk 为失配的参数。假定 $|\delta\Psi/\Psi| \ll 1$,将摆方程展开,略去二级以上的小量,保留一阶量得到

$$\frac{\mathrm{d}^2(\delta\Psi)}{\mathrm{d}z^2} = -\Omega_L^2 \sin(\Psi_0 + \Delta kz) \tag{8}$$

满足初始条件 $\delta\Psi|_{z=0} = 0$, $\mathrm{d}(\delta\Psi)/\mathrm{d}z|_{z=0} = 0$,于是(8)式的解为

$$\delta\Psi = -\Omega_L^2[\sin(\Psi_0 + \Delta kz) - \sin\Psi_0 + \Delta kz\cos\Psi_0]/\Delta k^2 \tag{9}$$

Ψ_0 为初始相位, Ψ_0 在 $0\sim 2\pi$ 之间取值, 对 Ψ_0 取平均得到

$$\langle\cos\Psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\Psi \mathrm{d}\Psi_0 = \Omega_L^2[1-\cos(\Delta kz)-\sin(\Delta kz)]/(2\Delta k^2) \tag{10a}$$

$$\langle\sin\Psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\Psi \mathrm{d}\Psi_0 = -\Omega_L^2[\sin(\Delta kz)-\Delta kz\cos(\Delta kz)]/(2\Delta k^2) \tag{10b}$$

上两式中 $\langle\rangle$ 表示平均, 因所有电子的初始相位均在 $0\sim 2\pi$ 之间, 因此, $\langle\rangle$ 实际上表示对所有电子的平均。上两式还用到 Ψ 的展开式以及 $\delta\Psi$ 的表达式(9) 式。

FEL 的折射率和增益关系分别为[4]

$$\mathrm{Re}(n)-1 = \frac{1}{k_s}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\frac{a_w}{a_s}\left\langle\frac{\cos\Psi}{\gamma}\right\rangle \tag{11a}$$

$$\mathrm{Im}(n) = -\frac{1}{k_s}\frac{\mathrm{d}a_s}{\mathrm{d}z} = -\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\frac{a_w}{a_s}\left\langle\frac{\sin\Psi}{\gamma}\right\rangle \tag{11b}$$

上两式中 $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ 为等离子体频率, n_0 为电子束的电子密度。

对小信号增益, 电子能量损失(转换为 FEL 场能) 很小, γ 近似为常量, 由(10a) 和(10b) 成为

$$\mathrm{Re}(n)-1 = \frac{\omega_p^2}{4\omega^2}\frac{a_w}{a_s}\frac{1}{\gamma}\frac{\Omega_L^2}{\Delta k^2}(1-\cos\Delta kz-\Delta kz\sin\Delta kz) \tag{12a}$$

$$\mathrm{Im}(n) = -\frac{\omega_p^2}{4\omega^2}\frac{a_w}{a_s}\frac{1}{\gamma}\frac{\Omega_L^2}{\Delta k^2}(\sin\Delta kz-\Delta kz\cos\Delta kz) \tag{12b}$$

由(11) 式可以得到 $a_s(z) = a_s(0)\exp[-k_s\int_0^z\beta(z')\mathrm{d}z']$, 则增益 $G = [a_s(z)-a_s(0)]/a_s(0) = \exp[-k_s\int_0^z\beta(z')\mathrm{d}z']-1$, 由于是小信号增益, $\exp[-k_s\int_0^z\beta(z')\mathrm{d}z'] \ll 1$, 则 $G = -k_s\int_0^z\beta(z')\mathrm{d}z'$, 即增益为折射率虚部, $\mathrm{Im}(n)$ 沿 z 的积分, 利用(12b) 式, 对 G 积分得到

$$G = \frac{k_s\omega_p^2}{\gamma\omega^2}k_w^2a_w^2L^3[2(1-\cos\Delta kL)+\Delta kL\sin\Delta kL]/(\Delta kL)^3 = -G_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left|\frac{\sin x}{x}\right|^2 \tag{13}$$

式中 L 为 FEL 与电子互作用长度, 已令 $G_0 = (k_s\omega_p^2/4\gamma\omega^2)k_w^2a_w^2L^3$。(13) 式就是文献[5] 常采用的增益表达式。由(12) 式得

$$\Phi(L) = k_s\int_0^L\alpha(z)\mathrm{d}z = 4G_0[\Delta kL(1+\cos\Delta kL)-2\sin\Delta kL]/(\Delta kL)^3 \tag{14}$$

由以上分析得知, 摆方程的解能确定复折射率(12a, b), 从而得到光场的增益和相移(13) 和(14) 式, 于是就确定了光场的变化。

4　自由电子激光的色散关系

由(12a) 和(12b) 两式, 将增益系数和折射率写成复折射率形式

$$n-1 = \alpha+i\beta = [k_s\omega_p^2/(\gamma\omega^2)]k_w^2a_w^2z^2[1-(1-iu)\exp(iu)]/u^2 \tag{15}$$

式中 $u = \Delta kz$。考虑积分

$$S_L = \oint_C\frac{n(\omega')-1}{\omega'-u}\mathrm{d}\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n(u')-1}{u'-u}\mathrm{d}u' + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{n(\omega')-1}{\omega'-u}\mathrm{d}\omega' \tag{16}$$

式中的积分路径为: 由 $-\infty$ 至 $u-\epsilon$, 由 $u-\epsilon$ 沿上半平面的小半圆(半径为 ϵ) 至 $u+\epsilon$, 从而避开 u 轴的奇点 u, 再沿复平面 $w = u+iv$ 的上半平面无限大半圆由 $+\infty$ 回到 $-\infty$ 的闭合路径。C_R 表示上半平面的无限大半圆。

(16) 式中无限大半圆的积分满足约当引理[6], 即$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{n(\omega')-1}{\omega'-u}\mathrm{d}\omega'=0$。

由于被积函数$u(\omega)-1$(见16式)在复平面上半面内无奇点是解析函数, 亦即在闭合路径C内无奇点, 于是, $S_L=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n(u')-1}{u'-u}\mathrm{d}u'=P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n(u')-1}{u'-u}\mathrm{d}u'+\int_{C_\epsilon}\frac{n(u')-1}{u'-u}=0$。在此等式中, C_ϵ为圆心在u处半径为ϵ的小半圆, 方向为沿上半平面的顺时针方向由$u-\epsilon$至$u+\epsilon$, 可以计算出$\int_{C_\epsilon}\frac{n(u')-1}{u'-u}\mathrm{d}u'=-\pi i[n(u)-1]$, 从而得到

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n(u')-1}{u'-u}\mathrm{d}u'=\pi i[n(u)-1]\tag{17}$$

由(17)式左右虚实部相等, 得到

$$\alpha(u)=\mathrm{Re}(n)-1=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}[n(u')]}{u'-u}\mathrm{d}u'=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta(u')}{u'-u}\mathrm{d}u'\tag{18a}$$

$$\beta(u)=\mathrm{Im}(n)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}[n(u')-1]}{u'-u}\mathrm{d}u'=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(u')}{u'-u}\mathrm{d}u'\tag{18b}$$

上两式所表示的增益系数$\mathrm{Im}(n)$和折射率$\mathrm{Re}(n)-1$之间的关系即为FEL的色散关系, 也称Kramers-Kronig关系。

由(12a)式知$\alpha(u)$对u或Δk是奇对称的, 即$[n(-u)-1]^*=[n(u)-1]$从而可得到

$$\alpha(u)=\frac{2}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{u'\beta(u')}{u'^2-u^2}\mathrm{d}u'\tag{19a}$$

$$\beta(u)=-\frac{2u}{\pi}P\int_0^{\infty}\frac{\alpha(u')}{u'^2-u^2}\mathrm{d}u'\tag{19b}$$

上式说明FEL满足单边Hilbert变化对的性质, 表明FEL与电子互作用满足因果律, 因果律就是说响应不能早于输入, 即$z<0$时无互作用[7]。对于一般激光器, 由(1)式知也有等式$n(\omega)-1=[n(-\omega)-1]^*$成立, 于是也有与(19a, b)相似的单边Hilbert变换关系, 说明FEL虽然与一般激光器的产生机理不同, 但都满足单边Hilbert变换, 这表明FEL与一般激光器还有一些共性。由于$u=\Delta kz$, 于是(18a, b)可写成

$$\alpha(\Delta k)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta(\Delta k')}{\Delta k'-\Delta k}\mathrm{d}\Delta k'\tag{20a}$$

$$\beta(\Delta k)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(\Delta k')}{\Delta k'-\Delta k}\mathrm{d}\Delta k'\tag{20b}$$

同样, $\alpha(\Delta k)$和$\beta(\Delta k)$也满足与(19a, b)相似的单边Hilbert变换关系。

由于$\Delta k=k_w-k_s/(2\gamma^2)$, 于是$\alpha$和$\beta$的色散关系有几种变化形式, 一般来说, 对一定的FEL系统, $k_w=2\pi/\lambda_w$不变, 这样, Δk的变化对应于$k_s/2\gamma^2$的变化, 当γ固定时, 即电子能量固定时, λ_s(FEL波长)或$k_s=2\pi/\lambda_s$变化, 另一方面, 当k_s或λ_s固定时, γ变化, 这就是说α和β均可写成λ_s或γ的函数式。

下面我们对色散关系(20a, b)作简要分析。

当$u=0$, 由(20a, b)式, $\alpha(0)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta(\Delta k')}{\Delta k'}\mathrm{d}\Delta k'$, $\beta(0)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(\Delta k')}{\Delta k'}\mathrm{d}\Delta k'$。由于$\alpha(\Delta k)$为$\Delta k$的偶函数(12式), 则$\alpha(\Delta k)/\Delta k$为奇函数, 由$\beta(0)$的积分式得$\beta(0)=0$, 与(12b)式的结果一致。$\Delta k=0$意味着$\lambda_s=\lambda_w(2\gamma^2)$, 此时$\mathrm{Im}(n)=\beta(0)=0$, 表明FEL的增益系数为0, 同时增益$G$也为0。这是由于电子在有质动力势中发生振荡即共振, 电子失得能量平

衡, 总的效果电子能量无损失, FEL 无增益。另外由(12a) 式, $\Delta k = 0$ 时, $\mathrm{Re}(n) - 1 = \omega_p^2 k_w^2 a_w^2 L^2/(8\gamma\omega^w) > 0$, 这说明群聚电子束起到聚光作用即光导[8]。对非群聚电子束, 对 FEL 的折射率为 $n = 1 - \omega_p^2/\omega^2 < 1$, 使光场发散。这表明增益为零时电子与 FEL 之间仍存在互作用, 有质动力势使电子分布更集中于相位在 $-\pi/2$ 和 $\pi/2$ 之间, 使得 $\langle\cos\Psi\rangle$ 大于 0, 即电子发生群聚。

由(12b) 式, 当 $u = 1.27$ 时, $\mathrm{Im}(n)$ 达到最大值。我们可以借助于(20a) 来分析 $\mathrm{Re}(n) - 1$。任取一函数 $f(x)$, 作如下积分

$$F(x_0) = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x - x_0}\mathrm{d}x = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x + x_0)}{x}\mathrm{d}x = P\int_0^{\infty}[f(x + x_0) - f(-x + x_0)]\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{21}$$

由上式知, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处左右对称即 $f(-x + x_0) = f(x + x_0)$ 时, $F(x_0) = 0$; 否则, 若 $f(x)$ 在 x_0 处左右不对称即 $f(-x + x_0) \neq f(x + x_0)$ 时, 一般情况下 $F(x_0) \neq 0$。由于 $\mathrm{Im}(n)$ 在 $u = 1.27$ 处不对称(见 12b), 故由上式知, 利用(20a) 式得到 $\mathrm{Re}(n) - 1 \neq 0$。另由(12$a$) 式得 $\mathrm{Re}(n) - 1 = -0.07\omega_p^2 k_w^2 a_w^2 L^2/(\gamma\omega^2)$, 与由色散关系(20$a$) 的结果一致。这与文献中的结果一致, 就是说在增益取最大值时, 折射率小于 1(因为 $\mathrm{Re}(n) - 1 < 0$)。由于 $\mathrm{Re}(n) < 1$, 说 明电子束的折射使光场发散, 但由于 $\mathrm{Im}(n)$ 最大, 增益克服了折射发散效应, 使光场仍处于聚光状态, 即所谓增益光导起主导作用[9]。

以上分析是对一维情况而言的, 假定 $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$。实际中, FEL 在空间传输多为高斯模, 高斯光模随着距离是要发散的。上面指出, $\mathrm{Re}(n) - 1 > 1$ 时, 产生聚光效应即光导。但是, 对于高斯模的传输, $\mathrm{Re}(n) - 1 > 1$ 引起的聚光效应必须克服高斯束的衍射效应, 否则即使 $\mathrm{Re}(n) - 1 > 1$ 产生的聚光也不足以抵销高斯束的发散, 总之光束仍然发散。所以光导为二维或三维问题, 一维分析是不够的, 一维分析仅是定性的。我们在文献[10] 中对此问题作了分析, 在此简要说明。高斯束传输引起的相移 $\Delta\phi_1 = \mathrm{tg}^{-1}(\Delta z/z_r) = c\Delta t/z_r$($z_r = \pi w_0^2/\lambda_s$ 为瑞利长度, w_0 为高斯束光腰), 电子束群聚产生的相移为 $\Delta\phi_2$, 当 $\Delta\phi_1 < \Delta\phi_2$, 可得到当 $J > J_G$(其中 $J_G = \dfrac{2}{15\pi^2}\dfrac{mc^2}{e}\dfrac{\lambda\gamma^5}{a_w^2 z_r^3 F}$, $F = r_b^2/w_0^2$, r_b 为电子束的半径) 时, 总的效应才产生聚光效应。

对于一般的原子分子激光器, 在增益最大时, 增益函数在最大点左右对称, 故由(21) 式知 $\mathrm{Re}(n) - 1 = 0$, 这与 FEL 不同, 是由于它们产生的机理不同所致。一般的激光器是由能级间跃迁产生的, 低于或高于增益最大值点的频率的增益仍都是上下能级跃迁产生的, 没有区别, 即增益最大点左右是完全对称的。而自由电子激光是群聚电子产生的, 有质动力使电子发生群聚, 在增益最大时, 电子运动在有质动力势中是不对称的, 因此增益最大点的左右也是不对称的, 故 $\mathrm{Re}(n) - 1 \neq 0$。可见, 色散关系的分析有助于加深对 FEL 物理规律的认识, FEL 与一般激光器的增益和折射率的不同, 表明它们内在本质是不同的, 有着不同的物理含义。

5　结　论

本文推导出 FEL 线性区的增益系数和折射率, 证明它们满足 Hilbert 变换关系, 并进一步证明它们满足单边 Hilbert 变换关系, 说明 FEL 在线性区满足因果律。另外对 FEL 和一般激光器的增益和折射率作了对比分析, 结果表明它们有着本质的不同。

为了更明确起见, 可以将本文的结果用表 1 列出。

表 1 普通激光器和自由电子激光的色散关系比较

Table 1 Comparison of dispersion relations of ordinary laser and free-electron laser

	Ordinary laser	Free-electron laser
Amplification mode	particle reversion	Bunch of electron beam
Satisfying Hibert transform	Yes	No
Symmetric gain curve	Yes	No
When gain is maximum, $\Delta\Psi = 0$	Yes	No
Refraction index $\mathrm{Re}(n) - 1$	$\frac{2\pi N_e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \nu^2\omega^2}$	$\frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \frac{a_w}{a_s} \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_L^2}{\Delta k^2}[1 - \cos\Delta kz - \Delta kz\sin\Delta kz]$
Gain coefficient $\mathrm{Im}(n)$	$-\frac{2\pi N_e^2}{m} \frac{\nu\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \nu^2\omega^2}$	$-\frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \frac{a_w}{a_s} \frac{1}{\gamma} \frac{\Omega_L^2}{\Delta k^2}[\sin\Delta kz - \Delta kz\cos\Delta kz]$

参 考 文 献

1 Liu Chenggang. Relativistic Electronics. Beijing: Science Press, 1987, Chapter 13 (in Chinese)

2 Zhu Ruzeng. Laser Physics. Beijing: Defence Industry Press, 1979, Chapter 2 (in Chinese)

3 J. Mathews, R. L. Walker. Mathemtical methods of physics, The Benjamin/Cummings, 1970, Chapt 5

4 T. C. Marshall. Free Electron Laser. New York: Macmillan Publishing Co., 1985, Chapt 3

5 R. H. Pantell. Free-electron Laser. in Beijing Institute of Modern Physics Series, 1988, Vol. 2, 15~16

6 Hu Sizhu, Ni Guangjiong. Methods in Mathematic Physics. Shanghai: Fudan University Press, 1989, Chapter 7 (in Chinese)

7 J. De. Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley and Sons, 1975, Chapter 7

8 E. T. Scharlemann, A. M. Sessler, J. S. Wurtele. Optical guiding in a free-electron laser. *Phys. Rev. Lett.*, 1985, **54**(1): 1925~1928

9 S. Y. Cai, A. Bhattacharjee, T. C. Marshall. Optical guiding in a Raman free-electron laser. *IEEE J. Quant. Electr.*, 1987, **QE-23**(9): 1651~1656

10 Jiang Shaoen, Fu Changming, Su Yi. Numerical simulations and analyses of optical guiding in Raman free-electron lasers. *Acta Electronica Sinica* (电子学报), 1995, **23**(11): 112 (in Chinese)

Analyses on Dispersion Relations of Free-electron Laser

Jiang Shaoen

(*Southwest Institute of Nuclear Physics and Chemistry, Chengdu* 610003)

Abstract Dispersion relations of free-electron laser (FEL) are analysed. By solving the FEL's pendulum equation, gain coefficient $\mathrm{Im}(n)$ and refractive index $\mathrm{Re}(n) - 1$ are devived, then it is proved that there are Hilbert transformative relations between $\mathrm{Re}(n) - 1$ and $\mathrm{Im}(n)$, which are called dispersion relations, or Kramers-Kronig relations. Finally, the physical analyses on dispersion relations are made.

Key words FEL, dispersion relations, gain, refraction index